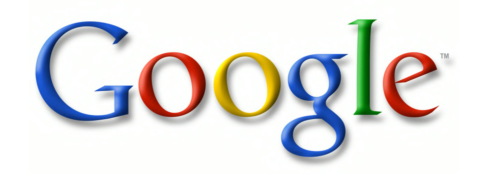
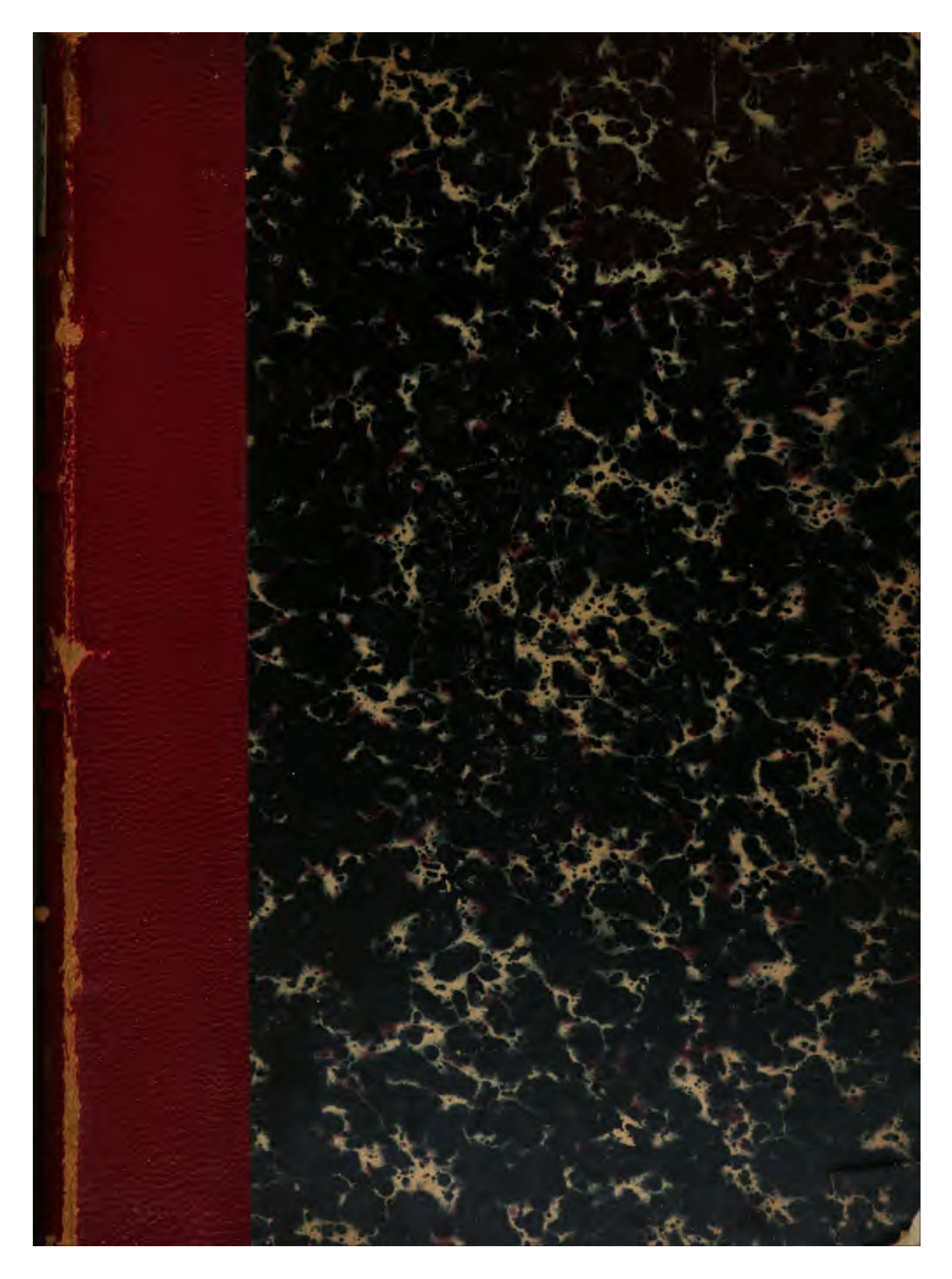






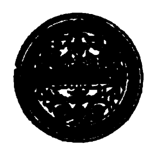

ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG SIGILLVM
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

Kleyers

Encyklopädie



der gesamten



mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Das

apollonische Berührungsproblem

und

verwandte Aufgaben

von

Prof. Heinrich Cranz.

Das

apollonische Berührungsproblem

und

verwandte Aufgaben.

Sammlung von 164 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren.

Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium.

Nach System Kleyer durchaus neu bearbeitete zweite Auflage.

Von

Prof. Heinrich Cranz.

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1891.

Buchdruckerei von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist bestimmt, diejenigen Hefte der „Kleyer-Encyklopädie“ zu ergänzen bezw. zu ersetzen, welche bisher über das Apollonische Problem erschienen sind.

Die Abtrennung dieses Zweigs der Konstruktionsaufgaben von den übrigen findet ihre Rechtfertigung darin, dass die Kreisberührungsaufgaben ein verhältnismässig abgeschlossenes Ganzes bilden, nur wenige Hilfssätze aus den übrigen Teilen der Planimetrie erfordern, aber sowohl ein erhöhtes theoretisches Interesse bieten, als für den Techniker, besonders den Zeichner, von grösster Wichtigkeit sind.

Ich habe mich nicht auf die Lösung der bekannten zehn Hauptaufgaben des Berührungsproblems beschränkt, welche in den Geometrielehrbüchern vorzugsweise behandelt werden, sondern nach unten und oben über diesen engen Rahmen hinausgegriffen.

Im Interesse desjenigen, welcher nur zu Zwecken des praktischen Zeichnens mit Kreisberührungsaufgaben zu thun hat, wurden auch die elementaren Aufgaben, namentlich diejenigen, bei welchen der Halbmesser des gesuchten Kreises gegeben ist, ausführlich dargestellt und sodann in einem besonderen Abschnitt gezeigt, wie man durch methodisches Probieren Kreise zeichnet, welche gegebene Bedingungen erfüllen.

Sodann wurden auch diejenigen Aufgaben in den Kreis der Betrachtung gezogen, welche sich mit dem Schnitt von Kreisen nach Sehnen von gegebener Länge, unter rechtem Winkel oder unter dem Durchmesser befassen.

Der Schnitt von Kreisen nach beliebig gegebenem Winkel hätte, vollständig behandelt, zu tief in das Prinzip der reciproken Radien hineingeführt und wurde deshalb bei Seite gelassen.

Die beiden Schlusskapitel enthalten im wesentlichen eine Reproduktion der beiden schönen Abhandlüngen Steiners im I. Band von Crelles Journal.

Durch den eleganten Schröterschen Beweis für die Steinersche Lösung des Malfattischen Problems ist das letztere neuerdings mehr in den Vordergrund getreten, möge das vorliegende Büchlein dazu beitragen, das Interesse nicht nur für dieses Problem, sondern auch für die übrigen reizvollen Beziehungen zwischen Berührungskreisen, welche Steiner in der erwähnten Abhandlung nachgewiesen hat, in weitere Kreise zu tragen.

Stuttgart, im November 1890.

Prof. Heinrich Cranz.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

E. Unvollständig gelöste Aufgaben, welche mit Proportionen und algebraischer Analysis zu lösen sind.

Zu diesem Abschnitt gehören Anmerkung 40, Erkl. 99—103.

Seite

F. Allgemeine Lösung der Hauptaufgaben des Berührungsproblems durch Sätze der neueren Geometrie.

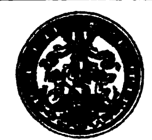
Zu diesem Abschnitt gehören: Anmerkung 41—49 und Erkl. 104—147.

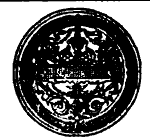
G. Potenzkreise. Prinzip der reciproken Radien. Malfattisches Problem.

845. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben. Seite 1—16. Mit 12 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.*

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Seite 1—16. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

Berührungsaufgaben, gelöst ohne Anwendung der Lehre von den Proportionen.

* Die Hefte 10, 14, 24, 29, 33, 39, 40, 53 der ersten Auflage des apollon. Berührungsproblems sind vergriffen. Durch die nunmehr zur Ausgabe gelangende zweite, von Prof. H. Cranz durchaus neu bearbeitete Auflage wird das apollonische Berührungsproblem zum Abschluss gebracht werden.

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln **angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine vollständige** Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale** lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren** Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16**, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Das

Apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Frage 1. Was versteht man unter dem Apollonischen Problem?

Erkl. 1. Ein Kreis ist eine Linie, deren Punkte sämtlich von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte, gleichen Abstand haben. Dieser Abstand heisst Halbmesser des Kreises. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich. (Siehe *Kleyer*, Lehrb. d. ebenen Elementargeometrie.)

Antwort. Das Apollonische oder Berührungsproblem umfasst diejenigen Aufgaben, bei welchen die Zeichnung von Kreisen verlangt wird, die durch gegebene Punkte hindurchgehen, gegebene gerade Linien, gegebene Kreise berühren sollen.

Frage 2. Welche anderen einfachen Beziehungen kann ein gesuchter Kreis zu gegebenen Geraden oder Kreisen haben?

Antwort. Der gesuchte Kreis kann gegebene Geraden oder gegebene Kreise nach Sehnen von gegebener Länge schneiden, gegebene Kreise rechtwinklig schneiden oder halbieren oder von gegebenen Geraden oder Kreisen halbiert werden.

Anmerkung 1. Die in Frage 1 berührten Aufgaben bilden das Apollonische Problem im engeren Sinne, im weiteren Sinne begreift man auch die in Frage 2 angeführte Klasse von Aufgaben darunter; im Folgenden sollen die ersteren als die Hauptaufgaben, die letzteren als die Nebenaufgaben des Apollonischen Problems bezeichnet werden.

Anmerkung 2. Das Apollonische Problem hat seinen Namen von dem griechischen Geometer *Apollonius von Pergä*. Derselbe wurde 247 v. Chr. zu Pergä in Pamphilien geboren, schrieb als Hauptwerk acht Bücher über Kegelschnitte, welche grösstenteils in arabischer Bearbeitung auf uns gekommen sind. In seinem verloren gegangenen Werke über Kreisberührungen löste er zuerst die wichtigste Aufgabe des Problems, nämlich einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt. (Siehe *Kleyer*s Encyklopädie: *Klimpert*, Geschichte der Geometrie Seite 69.)

Frage 3. Wie viele Angaben sind nötig, damit ein Kreis nach Grösse und Lage vollständig bestimmt ist?

Antwort. Zur vollständigen Bestimmung eines Kreises nach Grösse und Lage gehören drei Angaben; nämlich

eine über die Grösse und zwei über die Lage, oder drei Angaben über die Lage.

Das geeignetste Mittel, die Grösse eines Kreises zu bestimmen, ist die Angabe seines Halbmessers.

Die am häufigsten vorkommenden Lagenbestimmungen eines Kreises sind folgende:

Der gesuchte Kreis soll durch einen gegebenen Punkt gehen;

er soll eine gegebene Gerade berühren;

er soll einen gegebenen Kreis berühren;

er soll eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden;

er soll einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden;

er soll einen gegebenen Kreis halbieren, d. h. nach dem Durchmesser schneiden;

er soll von einem gegebenen Kreis halbiert, d. h. nach einem Durchmesser geschnitten werden.

Erkl. 2. Alle Kreise von gleichem Halbmesser sind einander kongruent.

Erkl. 3. Ein Kreis geht durch einen gegebenen Punkt, wenn der Abstand des Mittelpunkts von diesem Punkte gleich dem Halbmesser ist.

Erkl. 4. Ein Kreis berührt einen andern, wenn der Abstand beider Mittelpunkte gleich der Summe oder gleich der Differenz beider Halbmesser ist.

Erkl. 5. Ein Kreis schneidet einen andern rechtwinklig, wenn ihre Halbmesser nach einem der Schnittpunkte einen rechten Winkel mit einander bilden.

Erkl. 6. Ein Kreis halbiert einen andern, wenn die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise Durchmesser des zweiten Kreises ist.

Frage 4. Wie viele und welche Hauptaufgaben umfasst das Berührungsproblem, wenn der Halbmesser des gesuchten Kreises gegeben ist?

Erkl. 7. Bezeichnet man die Bestimmung a) durch p, die Bestimmung b) durch g, die Bestimmung c) durch k, so erhält man die Zahl der möglichen Aufgaben als Kombinationszahl mit Wiederholung der drei Elemente p, g, k in Klassen zu je zweien, also 6, nämlich:

$\odot$ aus $\varrho, p, p,$
" " $\varrho, p, g,$
" " $\varrho, p, k,$
" " $\varrho, g, g,$
" " $\varrho, g, k,$
" " $\varrho, k, k,$

wobei ϱ den Halbmesser des gesuchten Kreises bedeutet.

Antwort. Bei gegebenem Halbmesser bleiben für die Lagenbestimmungen des Kreises, abgesehen von der einfachsten Angabe, nämlich derjenigen des Mittelpunkts, je noch zwei von folgenden drei Bedingungen übrig:

a). Gehen durch einen gegebenen Punkt,

b). Berührung einer gegebenen Geraden,

c). Berührung eines gegebenen Kreises.

Daher umfasst in diesem Falle das Berührungsproblem sechs Hauptaufgaben, nämlich:

Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Halbmesser hat und:

1). durch zwei gegebene Punkte geht,

2). durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt,

3). durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt,

4). zwei gegebene Geraden berührt,

5). eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,

6). zwei gegebene Kreise berührt.

Anmerkung 3. Bezeichnet man die Bedingung, dass der gesuchte Kreis

eine gegebene Gerade g nach einer Sehne von gegebener Länge s schneidet, durch g_s,
einen gegebenen Kreis k nach einer Sehne von gegebener Länge s schneidet, „ k^s,
einen gegebenen Kreis k rechtwinklig schneidet, „ k_R,
einen gegebenen Kreis k halbiert, „ k_d,
von einem gegebenen Kreis k halbiert wird, „ k_δ,

so ergibt sich die Zahl der Neben- und Hauptaufgaben zusammen als Kombinationszahl mit Wiederholung der acht Elemente p, g, k, g_s, k_s, k_R, k_d, k_δ in Klassen zu je zweien, also 36 Aufgaben, worunter 6 Haupt- und 30 Nebenaufgaben.

Frage 5. Welche Hauptaufgaben umfasst das Apollonische Problem, wenn der Halbmesser des gesuchten Kreises nicht gegeben ist?

Antwort. Wenn der Halbmesser des gesuchten Kreises nicht gegeben ist, so sind folgende zehn Hauptaufgaben zu lösen:

Einen Kreis zu zeichnen, welcher:
1). durch drei gegebene Punkte geht,
2). durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt,
3). durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt,
4). durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Geraden berührt,
5). durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,
6). durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt,
7). drei gegebene Geraden berührt,
8). zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis berührt,
9). eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt,
10). drei gegebene Kreise berührt.

Erkl. 8. Die Zahl der möglichen Hauptaufgaben ist die Kombinationszahl von drei Elementen in Klassen zu je dreien mit Wiederholung.

Unter der oben gewählten Bezeichnungsweise lassen sich die zehn Hauptaufgaben kurz so schreiben:

⊙ aus $p, p, p,$
$p, p, g,$
$p, p, k,$
$p, g, g,$
$p, g, k,$
$p, k, k,$
$g, g, g,$
$g, g, k,$
$g, k, k,$
$k, k, k.$

Anmerkung 4. Die Zahl der Haupt- und Nebenaufgaben zusammen ist die Kombinationszahl mit Wiederholung von acht Elementen in Klassen zu je dreien, also $\frac{8.9.10}{1.2.3} =$ 120, also 10 Haupt- und 110 Nebenaufgaben. Diese Zahl ist zu gross, als dass alle behandelt werden könnten. Es sollen deshalb nur die wichtigsten ausführlich dargestellt werden.

Anmerkung 5. Nach der Schwierigkeit der Auflösung werden die genannten und angedeuteten Aufgaben am besten eingeteilt 1) in Aufgaben, welche ohne die Lehre von den Proportionen gelöst werden können, 2) in Aufgaben, zu deren Lösung Proportionen und algebraische Analysis nötig sind, 3) Auflösung von Aufgaben mit Hilfe von Sätzen aus der neueren Geometrie.

A. Berührungsaufgaben, gelöst ohne Anwendung der Lehre von den Proportionen.

Anmerkung 6. Zu diesen Aufgaben gehören in erster Linie die in Frage 4 und Anmerkung 3 erwähnten Aufgaben, bei welchen der Halbmesser des gesuchten Kreises gegeben ist, ferner besondere Fälle anderer Aufgaben, in welchen die gegebenen Bestimmungsstücke eine besonders einfache Lage gegen einander haben.

Frage 6. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche durch einen gegebenen Punkt gehen?

Erkl. 9. Unter geometrischem Ort eines Punktes, welcher einer gewissen Bedingung unterworfen ist, versteht man die Linie, auf welcher sämtliche Punkte liegen, welche jener Bedingung Genüge leisten. (Siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben I, Anm. 13 u. 14.)

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, liegen auf einem Hilfskreis um den gegebenen Punkt mit dem gegebenen Halbmesser (siehe Erklärung 3).

Frage 7. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche eine gegebene Gerade berühren?

Erkl. 10. Ein Kreis berührt eine Gerade, oder die Gerade ist Tangente an den Kreis, wenn der senkrechte Abstand der Geraden vom Mittelpunkte gleich dem Halbmesser ist. (Siehe *Kleyer*, Lehrb. der ebenen Elementargeometrie I.)

Erkl. 11. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von der gegebenen Geraden G eine gegebene Entfernung a hat, besteht aus den beiden Parallelen zu G im Abstand a. (Siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben I, Anm. 14.)

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche eine gegebene Gerade berühren, liegen auf einer der beiden Parallelen, welche zu der gegebenen Geraden in einem Abstand gleich dem gegebenen Halbmesser gezogen werden können.

Beweis folgt aus Erklärung 10 und 11.

Frage 8. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis berühren?

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis berühren, liegen auf einem zu dem gegebenen Kreis konzentrischen Kreispaar.

Die Halbmesser dieses Kreispaares findet man, wenn man den Halbmesser des gegebenen Kreises um den gegebenen Halbmesser der gesuchten Kreise vergrössert und verkleinert.

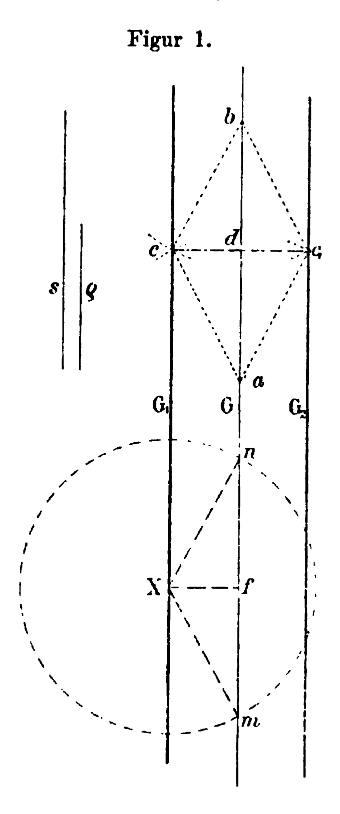
Der konzentrische Kreis mit der Summe beider Halbmesser enthält die Mittelpunkte der den gegebenen Kreis von aussen berührenden Kreise, der konzentrische Kreis mit der Differenz beider

Halbmesser enthält die Mittelpunkte der den gegebenen Kreis von innen oder umschliessend berührenden Kreise.

Beweis folgt aus Erklärung 4.

Frage 9. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden?

Figur 1.



Erkl. 12. Wenn in zwei gleichschenkligen Dreiecken die Schenkel und die Höhe der Grundlinie einzeln verglichen gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent. (Siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. ebenen Elementargeometrie.)

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden, liegen auf einer von zwei bestimmten Parallelen zur gegebenen Geraden.

Der Abstand dieser Parallelen von der gegebenen Geraden ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Länge der Sehne als Grundlinie und dem gegebenen Halbmesser als Schenkel.

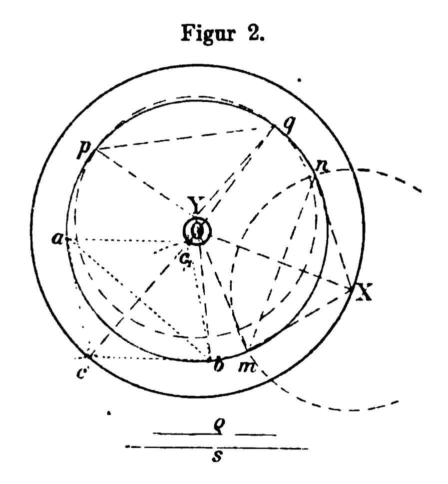
Beweis. Auf der gegebenen Geraden G sei ab beliebig abgetragen gleich der gegebenen Sehne s, über ab die gleichschenkligen Dreiecke abc und abc_1 mit Schenkel gleich dem gegebenen Halbmesser ϱ errichtet, durch c und c_1 die Parallelen G_1 und G_2 zu G gezogen. Um einen beliebigen Punkt X von G_1 (oder G_2) sei ein Kreis mit Halbmesser ϱ beschrieben, der G in m und n schneidet.

Fälle in den gleichschenkligen Dreiecken Xmn und cab die Höhen Xf und cd, so sind diese einander gleich als Lote zwischen Parallelen, ferner ist $Xm = Xn = ca = cb$ nach Konstruktion, also sind die gleichschenkligen Dreiecke Xmn und cab kongruent, daher $mn = ab$, w. z. b. w.

Frage 10. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden?

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden, liegen auf

Figur 2.



Erkl. 13. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Seiten des einen Dreiecks gleich denen des andern Dreiecks sind.

Erkl. 14. Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, so sind die entsprechenden Stücke beider Dreiecke einander gleich.

Erkl. 15. Das Lot von dem Mittelpunkt auf eine Sehne ist Mittellot der letzteren und halbiert den zugehörigen Bogen und Zentriwinkel (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. ebenen Elementargeometrie) und umgekehrt.

Erkl. 16. Zu gleichen Bögen desselben oder gleicher Kreise gehören auch gleiche Sehnen, Zentriwinkel; Mittellote der Sehnen und umgekehrt.

einem von zwei zu dem gegebenen Kreis konzentrischen Kreisen.

Die Halbmesser dieser konzentrischen Kreise findet man als dritte Seite eines Dreiecks, in welchem die gegebenen Halbmesser des gegebenen und des gesuchten Kreises die beiden ersten Seiten und die halbe gegebene Sehne Höhe der dritten Seite ist (siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben Aufg. 120).

Beweis. In den Kreis O sei beliebig die Sehne $ab =$ der gegebenen Strecke s gelegt und darüber nach aussen und innen je ein gleichschenkliges Dreieck abc (abc_1) mit dem gegebenen Halbmesser ϱ der gesuchten Kreise als Schenkel errichtet, um O konzentrische Kreise mit den Halbmessern Oc und Oc_1 beschrieben. Irgend ein Kreis, welcher seinen Mittelpunkt X (Y) auf dem äusseren (inneren) der beiden konzentrischen Kreise hat und den Halbmesser ϱ hat, schneidet den gegebenen Kreis in m und n (p und q). Dann sind die Dreiecke OXm (OYq) und Ocb (Oc_1b) kongruent (die drei Seiten sind gleich), also sind die Winkel cOb und XOm (YOq) oder die halben Zentriwinkel der Sehnen ab und mn (pq) einander gleich. Daher sind auch die ganzen Zentriwinkel und die zugehörigen Sehnen einander gleich ($mn = pq = ab$), w. z. b. w.

Frage 11. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden?

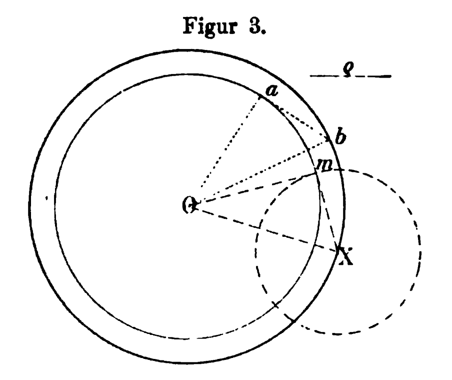
Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden, liegen auf einem zu dem gegebenen Kreis konzentrischen Kreise.

Der Halbmesser dieses Kreises ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden gegebenen Halbmessern als Katheten.

Erkl. 17. Die Tangente steht senkrecht auf dem Halbmesser nach dem Berührungspunkt.

Beweis. Es sei in Fig. 3 an den gegebenen Kreis um O mit Halbmesser r im beliebigen Punkte a die Tangente gezogen, auf ihr ab gleich dem gegebenen Halb-

Figur 3.

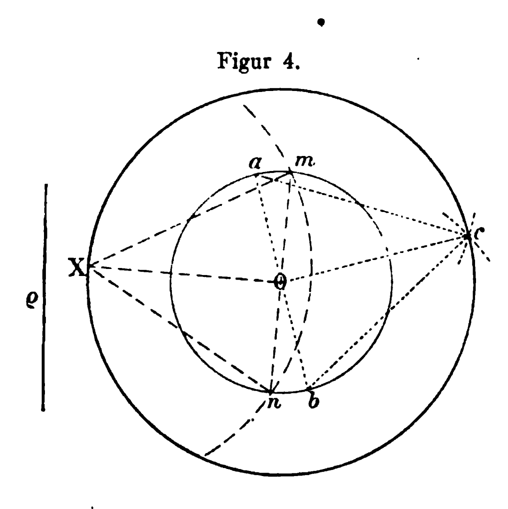


messer ϱ des gesuchten Kreises gemacht und um O mit Ob ein Kreis beschrieben. Ein um einen beliebigen Punkt X dieses Kreises mit Halbmesser $\varrho = ab$ beschriebener Kreis schneide den gegebenen in m, so ist Dreieck OmX kongruent mit Dreieck Oab, denn OX = Ob, Om = Oa, mX = ab; also ist $\sphericalangle$ OmX = $\sphericalangle$ Oab = 90°. Der Kreis um X schneidet also den gegebenen Kreis rechtwinklig, w. z. b. w.

Frage 12. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis halbieren?

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche einen gegebenen Kreis halbieren, liegen auf einem zu dem gegebenen Kreis konzentrischen Kreise. Der Halbmesser desselben ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Durchmesser des gegebenen Kreises als Grundlinie und dem gegebenen Halbmesser des gesuchten Kreises als Schenkel.

Figur 4.



Erkl. 18. Die Schenkel eines gestreckten Winkels bilden eine Gerade.

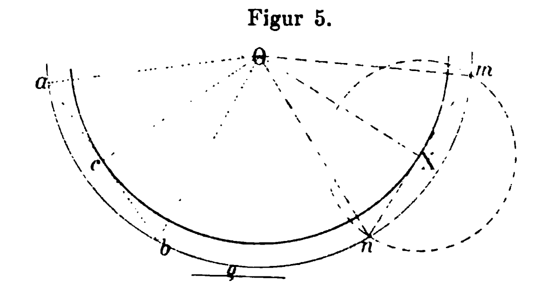
Beweis. (Fig. 4.) Ueber dem beliebigen Durchmesser $ab = 2r$ des gegebenen Kreises O ist das gleichschenklige Dreieck abc mit $ac = bc = \varrho$ gleich dem gegebenen Halbmesser des gesuchten Kreises als Schenkel. Um O ist mit Oc ein Kreis beschrieben. Ein um den beliebigen Punkt X dieses Kreises mit ϱ beschriebener Kreis schneidet den gegebenen Kreis in m und n, dann ist Dreieck XOm $\cong c$Ob und Dreieck XOn $\cong c$Oa nach Erklärung 17, folglich ist $\sphericalangle$XOm = $\sphericalangle$XOn = $\sphericalangle a$Oc = $\sphericalangle b$Oc = 90°, daher ist $\sphericalangle m$On ein gestreckter Winkel oder aOb ist eine Gerade, nämlich Durchmesser, w. z. b. w.

Frage 13. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche von einem gegebenen Kreise halbiert werden?

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise von gegebenem Halbmesser, welche von einem gegebenen Kreis halbiert werden, liegen auf einem zu dem gegebenen Kreis konzentrischen Kreise. Der Halbmesser dieses konzentrischen Kreises ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks

mit dem Halbmesser des gegebenen Kreises als Schenkel und dem gegebenen Durchmesser des gesuchten Kreises als Grundlinie.

Figur 5.



Beweis. Der doppelte Halbmesser des gesuchten Kreises, 2ϱ in Fig. 5, ist beliebig in den gegebenen Kreis als Sehne ab gelegt und in c halbiert, um O ist mit Oc ein Kreis beschrieben. Der um den beliebigen Punkt X dieses Kreises mit Halbmesser ϱ beschriebene Kreis schneidet den gegebenen in m und n, dann ist:

$$\triangle\, 0Xm \cong 0bc$$

und

$$\triangle\, 0Xn \cong 0ac$$

nach Erklärung 17, daher ist:

$$\sphericalangle\, 0Xm = \sphericalangle\, 0Xn = \sphericalangle\, 0ca = 90^\circ$$

also:

$$\sphericalangle\, mXn = 180^\circ,$$

daher mn Durchmesser des Kreises X, w. z. b. w.

Frage 14. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche gleichzeitig durch zwei gegebene Punkte gehen?

Erkl. 19. Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke über der gleichen Grundlinie liegen auf dem Mittellot der letzteren.

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche gleichzeitig durch zwei gegebene Punkte gehen, liegen auf dem Mittellot der Verbindungsstrecke der beiden gegebenen Punkte.

Beweis. Die Mittelpunkte bilden die Spitzen von gleichschenkligen Dreiecken mit der Verbindungsstrecke als Grundlinie.

Frage 15. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche gleichzeitig zwei gegebene Geraden berühren?

Erkl. 20. Alle Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleich weit entfernt sind, liegen auf der Halbierungsgeraden des Winkels. (Siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben I, Anm. 14.)

Erkl. 21. Die Halbierungsgeraden zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche gleichzeitig zwei gegebene Geraden berühren, liegen auf einer der beiden Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den gegebenen Geraden.

Beweis folgt aus Erklärung 10 und 20. Die beiden Halbierungsgeraden stehen auf einander senkrecht (siehe Erkl. 21).

Frage 16. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Parallelen berühren?

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Parallelen berühren, liegen auf der Mittelparallele.

Der Halbmesser aller dieser Kreise ist der halbe Abstand der gegebenen Parallelen.

Beweis folgt aus Erklärung 11.

Frage 17. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren?

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, liegen auf der Senkrechten zur gegebenen Geraden durch den gegebenen Punkt.

Beweis folgt aus Erklärung 16.

Frage 18. Was ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren?

Erkl. 22. Wenn zwei Kreise einander berühren, so liegen die beiden Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer Geraden.

Antwort. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, liegen auf dem nach dem gegebenen Punkt gezogenen Halbmesser des gegebenen Kreises oder auf seiner Verlängerung.

Beweis folgt aus Erklärung 4 und 22.

Anmerkung 7. Bei den ersten der folgenden Aufgaben ist ihrer Einfachheit halber nur die Konstruktion angegeben, bei einigen andern nur Analysis und Konstruktion, wenn der Beweis sich direkt aus der Analysis ergibt.

Aufgabe 1. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht.

Erkl. 23. Die Aufgabe ist analog mit der: Ueber einer gegebenen Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck mit gegebenem Schenkel zu konstruieren.

Gegeben: ϱ, P, P_1.

Gesucht: Kreis um X.

Konstruktion. Beschreibe um P und P_1 Kreisbögen mit ϱ, welche einander in X und X_1 schneiden, beschreibe um X und X_1 Kreise mit ϱ (siehe die Fragen 6 und 14).

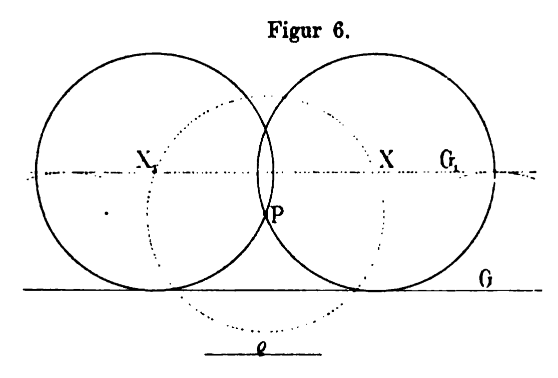
Determination. Zwei (kongruente) Lösungen, wenn $\varrho > {}^1/_2\, PP_1$, eine Lösung, wenn $\varrho = {}^1/_2\, PP_1$, keine Lösung, wenn $\varrho < PP_1$ ist.

Aufgabe 2. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

Gegeben: ϱ, P, G.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 6.



(S. Erkl. 15.) Die Erkl. 15 lässt sich auch so aussprechen: Ein Kreis schneidet eine Gerade in zwei Punkten, wenn sein Abstand von der Geraden kleiner ist als der Halbmesser. Diese beiden Schnittpunkte liegen symmetrisch gegen das Lot vom Mittelpunkt auf die Gerade.

Analysis. Man erhält für den gesuchten Mittelpunkt zwei geometrische Oerter aus den Fragen 6 und 7.

Konstruktion. (Fig. 6.) Beschreibe um P einen Hilfskreis mit Halbmesser ϱ, ziehe auf derjenigen Seite von G, wo P liegt, die Parallele zu G im Abstand ϱ; die Parallele schneidet den Hilfskreis in X und X_1; beschreibe um X und X_1 Kreise mit Halbmesser ϱ, diese sind die gesuchten.

Beweis siehe Analysis.

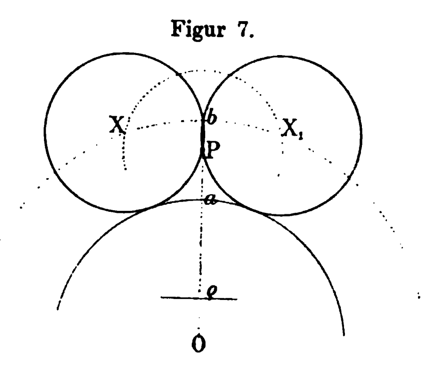
Determination. Es gibt zwei Lösungen, wenn der Abstand des Punktes P von G $< 2\varrho$ ist, beide Lösungen liegen symmetrisch gegen die Senkrechte von P auf G als Achse. Ist dieser Abstand $= 2\varrho$, so gibt es nur eine, ist er grösser als 2ϱ, so gibt es keine Lösung.

Anmerkung 8. Die Parallele zu einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Abstand zeichnet man am kürzesten, indem man um zwei möglichst entfernte Punkte der Geraden mit dem Abstand Kreisbögen beschreibt und an diese die gemeinsame Tangente zieht.

Aufgabe 3. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: ϱ, P, Kreis um O.
Gesucht: Kreis um X.

Figur 7.



(S. Erkl. 4.) Zwei Kreise berühren einander, wenn ihre gemeinschaftliche Zentrale gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbmesser ist.

Analysis. Man erhält für den gesuchten Mittelpunkt zwei geometrische Oerter aus den Antworten auf die Fragen 6 und 8.

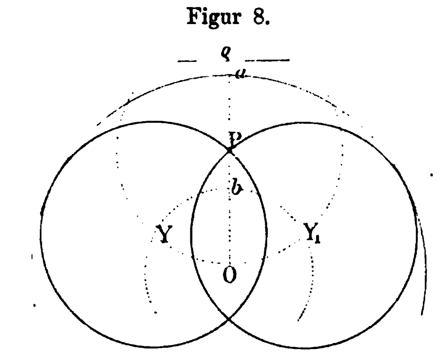
Konstruktion. Ziehe (Fig. 7 und 8) OP, welche den gegebenen Kreis in a schneidet, mache auf Oa die Strecke $ab = \varrho$, beschreibe um O mit Ob einen Kreis und um P mit ϱ einen Hilfskreis, welcher den vorigen Kreis in X und X_1 (Y und Y_1) trifft. Ein Kreis um X (Y) mit ϱ ist der gesuchte.

Beweis. Nach Konstruktion ist $Ob = r + \varrho$ oder $r - \varrho$, wenn r den Halbmesser des gegebenen Kreises bedeutet. Also berührt nach Erklärung 4 der Kreis um X (Y) den Kreis um O, ferner ist nach Konstruktion XP (YP) $= \varrho$, also geht der Kreis um X durch P (siehe Erkl. 3).

Determination. Es kann 4, 2, 1, 0 Lösungen geben, je nachdem der Hilfskreis um P mit ϱ die beiden konzentrischen Kreise schneidet, nur einen schneidet oder beide berührt, einen berührt, gar keinen schneidet oder berührt.

Die Bedingungen für den Abstand des

Figur 8.



Erkl 24. Zwei Kreise mit den Halbmessern R und r (wo $R > r$ ist), liegen ganz auseinander, wenn ihre gemeinschaftliche Zentrale, d. h. die Verbindungsstrecke a ihrer Mittelpunkte, grösser als $R + r$ ist,

sie berühren einander von aussen, wenn

$$a = R + r,$$

sie schneiden einander in zwei Punkten, welche gegen die gemeinsame Zentrale symmetrisch liegen, wenn

$$a < R + r$$

aber zugleich

$$a > R - r,$$

sie berühren einander von innen, wenn

$$a = R - r,$$

der kleinere Kreis liegt innerhalb des grösseren, wenn

$$a < R - r \text{ ist.}$$

Punktes P vom Mittelpunkte O des gegebenen Kreises ergeben sich in allen diesen Fällen aus Erklärung 24. Man hat dabei zu unterscheiden, ob $r \gtrless \varrho$ ist.

Der Halbmesser des äusseren konzentrischen Kreises ist $r + \varrho$, der des inneren entweder $r - \varrho$ oder $\varrho - r$.

Der äussere konzentrische Kreis wird nicht geschnitten, wenn

$$OP > r + 2\varrho, \text{ oder } OP < r$$

ist; er wird berührt, wenn

$$OP = r + 2\varrho, \text{ oder } OP = r$$

ist; er wird in zwei Punkten geschnitten, wenn

$$OP < r + 2\varrho, \text{ aber zugleich } > r$$

ist.

Im Falle $r > \varrho$ wird der innere konzentrische Kreis nicht geschnitten, wenn

$$OP > r, \text{ oder } OP < r - 2\varrho$$

ist; er wird berührt, wenn

$$OP = r, \text{ oder } OP = r - 2\varrho$$

ist; er wird geschnitten, wenn

$$OP < r, \text{ aber zugleich } > r - 2\varrho$$

ist.

Im Falle $r < \varrho$ wird der innere konzentrische Kreis nicht geschnitten, wenn

$$OP > 2\varrho - r, \text{ oder } OP < r;$$

berührt, wenn

$$OP = 2\varrho - r, \text{ oder } OP = r;$$

geschnitten, wenn

$$OP < 2\varrho - r, \text{ aber zugleich } OP > r$$

ist.

Die Kombination dieser Möglichkeiten ergibt:

Keine Lösung:

a). wenn $OP > r + 2\varrho$,

b). wenn $r > 2\varrho$ und $OP < r - 2\varrho$,

c). wenn $\varrho > r$ und $OP > r$.

Eine Lösung:

a). wenn $OP = r + 2\varrho$,

b). wenn $r > 2\varrho$ und $OP = r - 2\varrho$

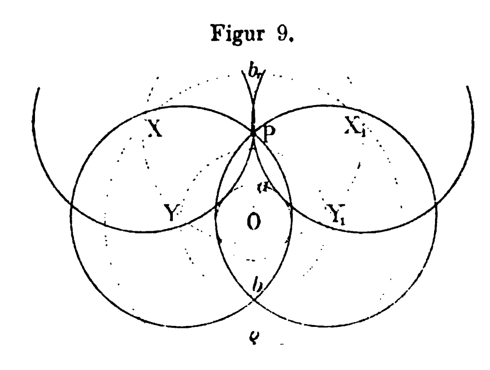
(im ersten Falle äussere, im andern innere Berührung).

Zwei Lösungen, wenn

a). $OP = r$,

b). $OP > r$ aber $< r + 2\varrho$,

Figur 9.



c) $r > \varrho$ und $OP < r$ aber $> r - 2\varrho$

(im ersten Falle eine äussere und eine innere, im zweiten Falle entweder zwei äussere oder zwei umschliessende, im letzten Falle zwei innere Berührungen).

Drei Lösungen, wenn

$\varrho > r$ und $OP = 2\varrho - r$

(zwei äussere und eine umschliessende Berührung).

Vier Lösungen (siehe Fig. 9), wenn

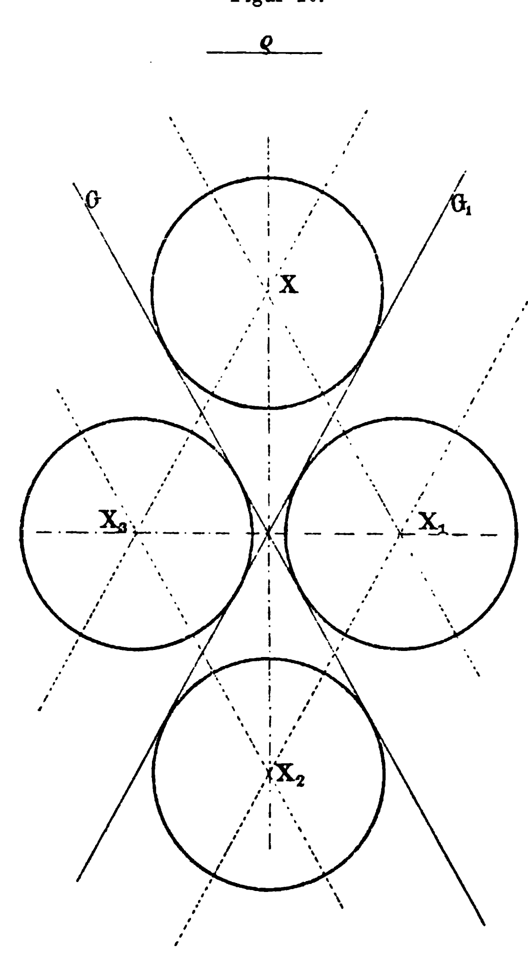
$\varrho > r$, $OP > r$ aber $< 2\varrho - r$.

Aufgabe 4. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden berührt.

Gegeben: ϱ, G, G_1.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 10.



Analysis. Nach Frage 7 erhält man als geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt die Parallelenpaare zu jeder der beiden Geraden im Abstande ϱ.

Konstruktion. Ziehe zu jeder der gegebenen Geraden G und G_1 das Parallelenpaar im Abstande ϱ (siehe Anm. 8), diese vier Geraden schneiden einander in vier Punkten X, X_1, X_2, X_3, beschreibe um jeden derselben einen Kreis mit ϱ, so entsprechen diese Kreise der Aufgabe.

Beweis folgt aus der Analysis.

Determination. Es gibt stets vier Lösungen, wenn die gegebenen Geraden nicht parallel sind, in diesem Falle gibt es keine Lösung, ausser wenn ϱ gleich dem halben Abstand der beiden Parallelen ist, dann aber löst jeder Kreis um irgend einen Punkt der Mittelparallele mit dem halben Abstand die Aufgabe. (Siehe Frage 16.)

Anmerkung 9. Zur Probe kann man auch die Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den gegebenen Geraden zeichnen, diese müssen nach Frage 15 ebenfalls durch die gesuchten Mittelpunkte hindurch gehen.

Aufgabe 5. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: ϱ, G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 11.

Analysis. Geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt erhält man aus Frage 7 und Frage 8.

Konstruktion. Ziehe zu G die beiden Parallelen G_1 (jenseits des Mittelpunkts) und G_2 (diesseits des Mittelpunkts) im Abstand ϱ, verlängere und verkürze einen beliebigen Halbmesser von Kreis O, etwa den auf G senkrecht stehenden Oa um die Strecken $ab = ae = \varrho$, beschreibe um O mit Ob und Oc konzentrische Kreise, diese schneiden die Parallelen in den Punkten X, X_1, $X_2 \ldots$, beschreibe um diese Punkte Kreise mit ϱ, so entsprechen dieselben der Aufgabe.

Beweis folgt aus Analysis.

Determination. Da jede der Parallelen jeden der konzentrischen Kreise in zwei Punkten schneiden kann, so kann es im günstigsten Fall acht Berührungskreise geben. Dieselben liegen symmetrisch auf beiden Seiten der Senkrechten Oa von O auf G.

Schneidet diese Senkrechte die jenseitige Parallele G_1 in e, die diesseitige G_2 in f, so gibt es acht Lösungen, wenn sowohl Oe als Of kleiner als der Halbmesser des inneren konzentrischen Kreises sind, keine Lösung dagegen, wenn Of grösser ist als der Halbmesser des äusseren konzentrischen Kreises. Ist l der Abstand der Geraden G vom Mittelpunkt, so schneidet resp. berührt die jenseitige Parallele den äusseren konzentrischen Kreis, wenn

$$l \leq r,$$

die jenseitige Parallele den inneren konzentrischen Kreis, wenn

$$l \leqq r - 2\varrho \quad \text{(für den Fall } r > \varrho\text{)},$$

oder

$$l \leqq r \quad \text{(für den Fall } \varrho > r\text{)},$$

die diesseitige Parallele schneidet den äusseren konzentrischen Kreis, wenn

$$l \leq r + 2\varrho,$$

die diesseitige Parallele schneidet den inneren konzentrischen Kreis, wenn

Erkl. 25. Eine Gerade schneidet einen Kreis in zwei gegen die Senkrechte vom Mittelpunkte auf sie symmetrischen Punkten, wenn ihr Abstand vom Mittelpunkt kleiner ist als der Halbmesser des Kreises.

$l \leqq r$ (für $r > \varrho$),

oder

$l \leqq 2\varrho - r$ (für $\varrho > r$).

Aus diesen Bedingungen ergibt sich in jedem einzelnen Fall die Zahl der Lösungen. Jeder Schnitt einer Parallele mit einem konzentrischen Kreis liefert zwei, jede Berührung derselben einen einzelnen Berührungskreis.

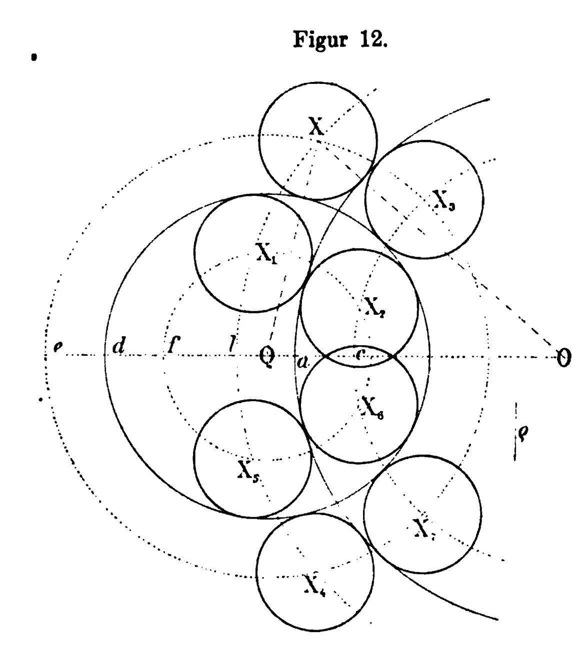
Anmerkung 10. Bei der Anfertigung sehr genauer Zeichnungen von Berührungskreisen bedient man sich mit Vorteil zweier Zirkel mit Bleifedereinsatz, von denen der eine die unveränderte Oeffnung ϱ behält, der andere zum Zeichnen der übrigen Kreise dient. Der Bleistift des Zirkels muss messerförmige Schneide haben.

Aufgabe 6. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

Gegeben: ϱ, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 12.



Analysis. Aus Frage 8 erhält man zwei geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt, nämlich ein konzentrisches Kreispaar zu jedem der gegebenen Kreise.

Konstruktion. Verlängere und verkürze (Fig. 12) einen beliebigen (etwa den auf der gemeinsamen Zentrale liegenden) Halbmesser Oa von Kreis O um die Strecken $ab = ac = \varrho$, verlängere und verkürze ebenso den Halbmesser Qd von Kreis Q um $de = df = \varrho$. Beschreibe um O die konzentrischen Kreise mit Ob und Oc, um Q mit Qe und Qf.

Die beiden konzentrischen Kreispaare schneiden einander in den Punkten X, X_1, X_2... Beschreibe um jeden dieser Punkte einen Kreis mit ϱ, so entsprechen diese Kreise der Aufgabe.

Beweis folgt aus der Analysis. (Siehe Erkl. 4.)

Determination. Die höchste Zahl der Berührungskreise ist acht. Dieselben liegen symmetrisch auf beiden Seiten der gemeinsamen Zentrale OQ.

Ist OQ $= l$, Halbmesser von O $=$ R, von Q $= r$, so schneidet bezw. berührt

der äussere konzentrische Kreis von O den äusseren konzentrischen von Q, wenn

$$l < \mathrm{R} + r + 2\varrho$$
$$> \mathrm{R} - r;$$

der äussere von O den inneren von Q, wenn

$$\left.\begin{array}{l} l \leqq \mathrm{R} + r \\ l \geqq \mathrm{R} - r + 2\varrho \end{array}\right\} \text{ für } r > \varrho,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} l \leqq R - r + 2\varrho \\ l \geqq R - r \end{array}\right\} \text{ für } \varrho > r,$$

der **äussere** von Q den **inneren** von O, wenn

$$\left.\begin{array}{l} l \leqq R + r \\ \quad \geqq R - r - 2\varrho \end{array}\right\} \text{ für } R > \varrho,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} l \leqq 2\varrho + r - R \\ \quad \geqq R + r \end{array}\right\} \text{ für } R < \varrho,$$

der **innere** von O den **inneren** von Q, wenn

$$\left.\begin{array}{l} l < R + r - 2\varrho \\ l > R - r \end{array}\right\} \text{ für } r > \varrho,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} l < 2\varrho - R - r \\ l < R - r \end{array}\right\} \text{ für } \varrho > R.$$

Aus dieser Zusammenstellung lässt sich in jedem einzelnen Falle die Zahl der Lösungen bestimmen. Jeder Schnitt zweier konzentrischen Kreise liefert zwei Berührungskreise, jede Berührung liefert einen einzelnen Berührungskreis, dessen Mittelpunkt auf der Zentrale liegt.

Aufgabe 7. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. Für den gesuchten Mittelpunkt erhält man zwei geometrische Oerter aus Frage 6 und Frage 9. (Höchstens 4 Kreise.)

Aufgabe 8. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. Für den gesuchten Mittelpunkt erhält man zwei geometrische Oerter aus Frage 6 und Frage 10. (4 Kreise.)

Aufgabe 9. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Für den gesuchten Mittelpunkt erhält man zwei geometrische Oerter aus Frage 6 und Frage 11. (2 Kreise.)

Aufgabe 10. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis halbiert.

Andeutung. Für den gesuchten Mittelpunkt erhält man zwei geometrische Oerter aus Frage 6 und Frage 12. (2 Kreise.)

Aufgabe 11. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und von einem gegebenen Kreis halbiert wird.

Andeutung. Für den gesuchten Mittelpunkt erhält man zwei geometrische Oerter aus Frage 6 und Frage 13. (2 Kreise.)

Anmerkung 11. Im Folgenden bedeute zur Abkürzung:

⊙ aus: einen Kreis zu beschreiben, welcher . . . .

ϱ einen gegebenen Halbmesser hat,

g eine gegebene Gerade berührt,

g_s oder g'_s oder g'_{s_1}: Die gegebene Gerade g oder g' nach einer Sehne von der Länge s bezw. s_1 schneidet,

K_s „ K'_s „ K'_{s_1}: Den gegebenen Kreis K oder K' nach einer Sehne von der Länge s bezw. s_1 schneidet,

K_R „ K'_R: Den gegebenen Kreis K oder K' rechtwinklig schneidet,

K_d „ K'_d: Den gegebenen Kreis K oder K' halbiert,

K_δ „ K'_δ: Von dem gegebenen Kreis K oder K' halbiert wird,

2 g. O. f. X.: Zwei geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt liefern . . .

Die eingeklammerte Zahl hinter der Andeutung bezeichnet die höchste Zahl der Lösungen.

Aufgabe 12.	⊙	aus	ϱ, g, g'_s	**Andeutung.**	2 g. O. f. X:	Frage	7 u. 9	(4)
Aufgabe 13.	„	„	ϱ, g, K_s	„	„ „	„	7 „ 10	(8)
Aufgabe 14.	„	„	ϱ, g, K_R	„	„ „	„	7 „ 11	(4)
Aufgabe 15.	„	„	ϱ, g, K_d	„	„ „	„	7 „ 12	(4)
Aufgabe 16.	„	„	ϱ, g, K_δ	„	„ „	„	7 „ 13	(4)
Aufgabe 17.	„	„	ϱ, k, g_s	„	„ „	„	8 „ 9	(8)
Aufgabe 18.	„	„	ϱ, K, K'_s	„	„ „	„	8 „ 10	(8)
Aufgabe 19.	„	„	ϱ, K, K'_R	„	„ „	„	8 „ 11	(4)
Aufgabe 20.	„	„	ϱ, K, K'_d	„	„ „	„	8 „ 12	(4)
Aufgabe 21.	„	„	ϱ, K', K'_δ	**Auflösung.**	Siehe unten.			(4)
Aufgabe 22.	„	„	ϱ, g_s, g'_{s_1}	**Andeutung.**	2 g. O. f X:	„	9 „ 9	(4)
Aufgabe 23.	„	„	ϱ, g_s, K_{s_1}	„	„ „	„	9 „ 10	(8)
Aufgabe 24.	„	„	ϱ, g_s, K_R	**Auflösung.**	Siehe unten.			(4)
Aufgabe 25.	„	„	ϱ, g_s, K_d	**Andeutung.**	2 g. O. f. X:	„	9 „ 12	(4)
Aufgabe 26.	„	„	ϱ, g_s, K_δ	„	„ „	„	9 „ 13	(4)
Aufgabe 27.	„	„	ϱ, K_s, K'_{s_1}	„	„ „	„	10 „ 10	(8)
Aufgabe 28.	„	„	ϱ, K_s, K'_R	„	„ „	„	10 „ 11	(4)
Aufgabe 29.	„	„	ϱ, K_s, K'_d	**Auflösung.**	Siehe unten.			(4)
Aufgabe 30.	„	„	ϱ, K_s, K'_δ	**Andeutung.**	2 g. O. f. X:	„	10 „ 13	(2)
Aufgabe 31.	„	„	ϱ, K_R, K'_R	„	„ „	„	11 „ 11	(2)
Aufgabe 32.	„	„	ϱ, K_R, K'_d	„	„ „	„	11 „ 12	(2)
Aufgabe 33.	„	„	ϱ, K_R, K'_δ	„	„ „	„	11 „ 13	(2)
Aufgabe 34.	„	„	ϱ, K_d, K'_d	„	„ „	„	12 „ 12	(2)
Aufgabe 35.	„	„	ϱ, K_d, K'_δ	„	„ „	„	12 „ 13	(2)
Aufgabe 36.	„	„	ϱ, K_δ, K'_δ	„	„ „	„	13 „ 13	(2).

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen**, **das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium**, **das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ **Das vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

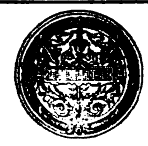
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

846. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 845. — Seite 17—32.
Mit 18 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem
nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 845. — Seite 17—32. Mit 18 Figuren.

Inhalt:
Berührungsaufgaben, gelöst ohne Anwendung der Lehre von den Proportionen. — Ungelöste Aufgaben.

Stuttgart 1890.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben** aus dem **Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit vielen **Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16,** entgegen und wird deren **Erledigung thunlichst berücksichtigt.**

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

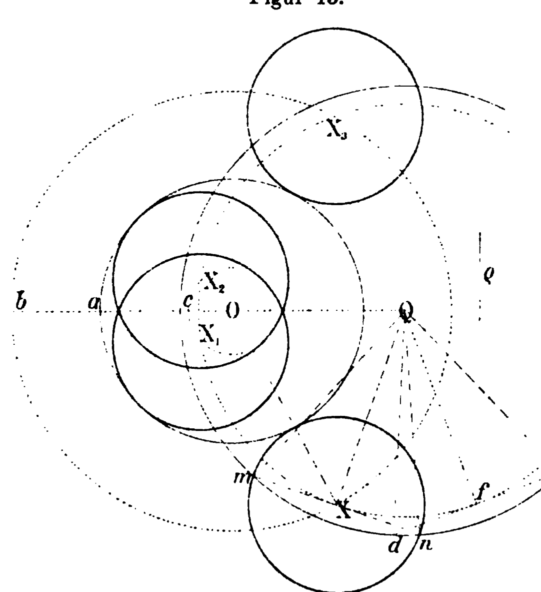
Aufgabe 21. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis berührt und von einem zweiten gegebenen Kreis halbiert wird.

Gegeben: ϱ, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Für den gesuchten Mittelpunkt X gibt es zwei geometrische Oerter, nämlich erstens das konzentrische Kreispaar um O mit der Summe und Differenz von r und ϱ (wenn r der Halbmesser um O ist), zweitens einen konzentrischen Kreis um Q mit dem Mittelpunktsabstand einer in Kreis O gelegten Sehne von der Länge 2ϱ (siehe Frage 8 und 13).

Figur 13.



Konstruktion. (Fig. 13.) Trage vom Endpunkte a des Halbmessers Oa die Strecken $ab = ac = \varrho$ nach beiden Seiten ab und beschreibe um O mit Ob und Oc zwei konzentrische Kreise. Lege die Sehne $de = 2\varrho$ beliebig in den Kreis Q, halbiere sie in f und beschreibe um Q mit Qf einen Hilfskreis, welcher die beiden konzentrischen Kreise in den Punkten X, X_1 ... schneidet. Jeder Kreis mit ϱ um einen dieser Punkte genügt der Aufgabe.

Beweis. $OX = Ob$ (Erkl. 1) $= r + \varrho$, daher berührt Kreis X den Kreis O (Erkl. 4). Kreis X schneide Kreis Q in m und n, so ist:

$$\triangle QmX \cong QnX \cong Qdf \cong Qef,$$

denn:

$$QX = Qf,$$

$$Qm = Qn = Qd = Qe \text{ (s. Erkl. 1)},$$

$$Xm = Xn = fd = fe \text{ (s. Erkl. 17)},$$

daher:

$$\sphericalangle QXm = \sphericalangle QXn = \sphericalangle Xfd = \sphericalangle Qfe = 90^0,$$

also ist $\sphericalangle mXn$ ein gestreckter Winkel, Kreis X wird also von Kreis Q nach dem Durchmesser geschnitten, w. z. b. w.

Analog ist der Beweis für die anderen Kreise.

(S. Erkl. 6.) Ein Kreis halbiert einen andern, wenn die gemeinsame Schnittsehne Durchmesser des zweiten Kreises ist.

(S. Erkl. 18.) Die Schenkel eines gestreckten Winkels bilden eine Gerade.

Determination. Da der Hilfskreis um Q jeden der beiden Hilfskreise um O in zwei Punkten schneiden kann, so ist die höchstmögliche Zahl der Lösungen vier (siehe Fig. 13).

Damit eine Lösung überhaupt möglich ist, muss 2ϱ als Sehne in den Kreis Q gelegt werden können, also:

$$\varrho < r_1$$

sein.

Der Hilfskreis um Q schneidet bezw. berührt den äusseren konzentrischen Kreis um O, wenn

$$OQ \leqq r + \varrho + Of$$

und

$$OQ \geqq r + \varrho - Of,$$

den inneren konzentrischen Kreis um O, wenn (für den Fall $r > \varrho$)

$$OQ \leqq r - \varrho + Of$$

und

$$OQ \geqq r - \varrho - Of,$$

oder für den Fall, dass $\varrho > r$:

$$OQ \leqq \varrho - r + Of$$

und

$$OQ \geqq \varrho - r - Of \text{ ist.}$$

Wenn keine der letzteren Bedingungen erfüllt ist, gibt es keine Lösung.

Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist:

$$Of = \sqrt{r_1^2 - \varrho^2}.$$

Erkl. 26. Lehrsatz des *Pythagoras*: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

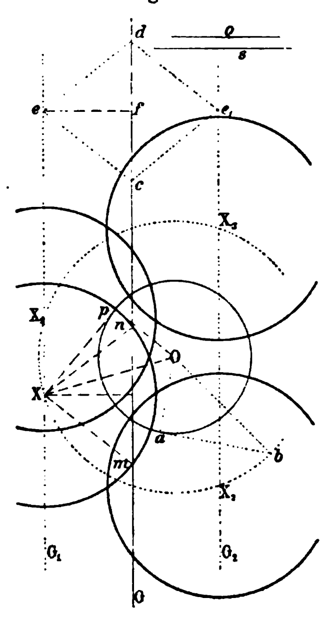
Aufgabe 24. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Gegeben: ϱ, s, G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Als geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt erhält man erstens: ein Parallelenpaar zu G, welches nach Frage 9 zu zeichnen ist, zweitens: einen Hilfskreis um O, dessen Halbmesser man nach Frage 11 findet.

Figur 14.



Konstruktion. Lege an den Kreis um O in einem beliebigen Punkte a eine Tangente und mache auf ihr $ab = \varrho$, beschreibe um O einen Hilfskreis mit Ob; mache irgendwo auf der Geraden G die Strecke $cd = s$ und errichte über cd die beiden gleichschenkligen Dreiecke cde und cde_1 mit ϱ als Schenkel. Ziehe durch e und e_1 die Parallelen G_1 und G_2 zu G, welche den Hilfskreis in den Punkten X, X_1 ... schneiden. Beschreibe um jeden dieser Punkte einen Kreis mit ϱ, so entsprechen diese Kreise der Aufgabe.

Beweis. Wenn Kreis X den gegebenen Kreis in p und die gegebene Gerade in m und n schneidet, so ist:

$$\triangle XOp \cong bOa \text{ (siehe Erkl. 13)},$$

also:

$$\sphericalangle \text{ bei } p = \sphericalangle \text{ bei } a = 90^0.$$

Ferner:

$$\triangle Xmn \cong \triangle ecd \text{ (siehe Erkl. 12)},$$

also:

$$mn = ed = s \text{ (w. z. b. w.)}.$$

(S. Erkl. 13.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Seiten des einen einzeln denen des andern gleich sind.

Determination. Da jede der beiden Parallelen den Hilfskreis schneiden kann, gibt es höchstens 4 Kreise, welche der Aufgabe genügen. Ist l die Entfernung der Geraden G vom Mittelpunkte O, h die Höhe ef des gleichschenkligen Dreiecks cde und r_1 der Halbmesser Ob des Hilfskreises, so schneidet bezw. berührt die jenseitige Parallele den Hilfskreis, wenn

$$l + h \leqq r_1,$$

die diesseitige Parallele, wenn

$$l - h \text{ oder } h - l \leqq r_1.$$

Aus dem pythagoräischen Lehrsatz ergibt sich (siehe Erkl. 26):

$$h = \sqrt{\varrho^2 - \frac{s'^2}{4}}$$

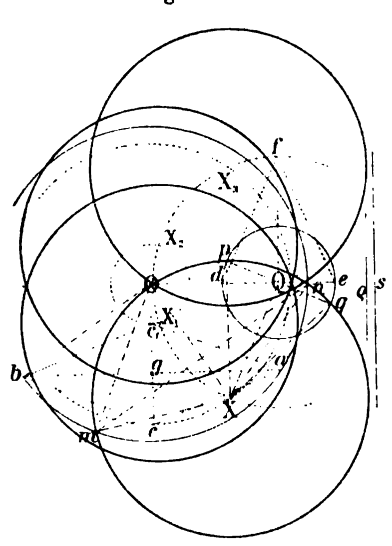
$$r_1 = \sqrt{r^2 + \varrho'^2}.$$

Aufgabe 29. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet und einen andern gegebenen Kreis halbiert.

Gegeben: ϱ, s, Kreis um O, Kreis um Q.
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Für den gesuchten Mittelpunkt erhält man als geometrische Oerter: erstens ein zu O konzentrisches Kreispaar (siehe Frage 10), zweitens einen zu Q konzentrischen Hilfskreis (siehe Frage 12).

Figur 15.



Konstruktion. Lege die Sehne $ab = s$ beliebig in den Kreis O, beschreibe über ab die gleichschenkligen Dreiecke abc und abc_1 mit ϱ als Schenkel und beschreibe um O konzentrische Kreise durch c und c_1; ziehe im Kreis Q den beliebigen Durchmesser de, beschreibe über de ein gleichschenkliges Dreieck def mit ϱ als Schenkel und zeichne um Q einen Hilfskreis mit Halbmesser Qf; der Hilfskreis schneidet die beiden konzentrischen Kreise um O in X, X_1, X_2, X_3 ... beschreibe um jeden dieser Punkte einen Kreis mit ϱ, so entsprechen diese Kreise der Aufgabe.

Beweis. Der Kreis X schneide Kreis O in m und n, Kreis Q in p und q, dann ist:

$\triangle mXO \cong nXO \cong bcO \cong acO$ (s. Erkl. 13), also:

(S. Erkl. 13.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die Seiten des einen denen des andern einzeln gleich sind.

$$\text{Viereck } XmOn \cong \text{Viereck } OaOb,$$

daher:

$$mn = ab = s.$$

Ferner:

$\triangle XpO \cong \triangle XqQ \cong fdQ \cong feQ$ (s. Erkl. 13), also:

$$\sphericalangle XpQ = \sphericalangle XqQ = \sphericalangle dQf = 90^0,$$

also $\sphericalangle pQq$ ein gestreckter Winkel oder pq Durchmesser des Kreises Q, w. z. b. w.

Determination. Da der Hilfskreis um Q jeden der konzentrischen Kreise um O schneiden kann, gibt es höchstens 4 Lösungen.

Der Hilfskreis schneidet bezw. berührt den grösseren konzentrischen Kreis, wenn

$$OQ \leqq Oc + Qf$$
$$\geqq Oc - Qf \text{ oder } Qf - Oc,$$

den kleineren konzentrischen Kreis, wenn

$$OQ \leqq Oc_1 + Qf$$

$$\geqq Oc - Qf \text{ oder } Qf - Oc_1 \text{ ist.}$$

Ist g der Schnittpunkt von Oc mit ab, so ist:

$$Oc = Og + gc,$$

$$Oc_1 = Og - gc.$$

Nach dem Pythagoräer ist (siehe Erkl. 26):

$$Og = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}},$$

$$gc = \sqrt{\varrho^2 - \frac{s^2}{4}},$$

$$Qf = \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}.$$

Unerlässliche Bedingung für die Möglichkeit der Aufgabe ist, dass:

$$r > \frac{s}{2},$$

$$\varrho > \frac{s}{2},$$

$$\varrho > r_1.$$

Aufgabe 37. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt und ausserdem eine zweite gegebene Gerade berührt.

Gegeben: G, P auf G, G_1.

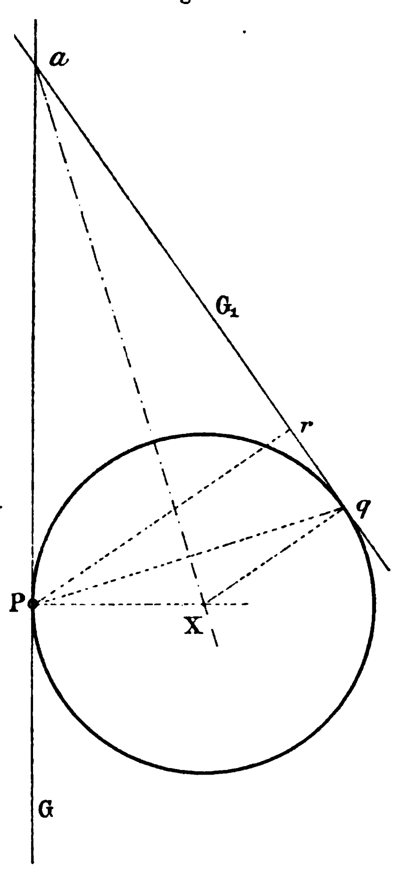
Gesucht: Kreis um X.

Analysis I. Der Kreis um X (Fig. 16) sei der gesuchte. Für X hat man als geometrische Oerter: erstens die Senkrechte auf G in P (siehe Frage 17), zweitens die Halbierungsgerade des Winkels, welchen G und G_1 bilden.

Erkl. 27. Die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kreis sind einander gleich.

Analysis II. Sei q (Fig. 16) der Berührungspunkt des Kreises X mit G_1 und a der Schnittpunkt von G und G_1, so ist $aP = aq$, daher ist q bekannt, und ein weiterer geometrischer Ort für X ist die Senkrechte auf G_1 in q.

Figur 16.



Analysis III. Denkt man sich (Fig. 16) von P auf G_1 das Lot Pr gefüllt und Pq gezogen, so ist $Pr \perp G_1$ und $Xq \perp G_1$, daher $Pr \parallel Xq$, also $\sphericalangle\, rPq = \sphericalangle\, PqX$, aber XPq ist ein gleichschenkliges Dreieck, also $\sphericalangle\, qPX = \sphericalangle\, PqX$, also ist $\sphericalangle\, rPq = \sphericalangle\, qPX$, folglich erhält man Punkt q durch die Halbierungsgerade des Winkels rPX.

Erkl. 28. Wechselwinkel bei durchschnittenen Parallelen sind einander gleich.

Erkl. 29. Die Grundwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

Konstruktion I. Errichte (Fig. 17) auf G in P die Senkrechte, halbiere die Winkel zwischen den Geraden, die Halbierungsgeraden schneiden die Senkrechte in X und X_1, beschreibe um X mit XP, um X_1 mit X_1P Kreise, diese sind die gesuchten.

Erkl. 30. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei entsprechend liegende Winkel gleich haben.

Beweis I. Fälle $Xq \perp G_1$, so ist:

$$\triangle\, aPX \cong aqX,$$

denn:

$$\sphericalangle\, PaX = \sphericalangle\, qaX,$$

$$aX = aX,$$

$$\sphericalangle\, XPa = \sphericalangle\, Xqa = 90^0,$$

also:

$$XP = Xq.$$

Kreis X berührt also die G_1.

Analog der Beweis für X_1.

Figur 17.

Konstruktion II. Mache (Fig. 17) auf G_1 vom Schnittpunkt a der beiden Geraden aus die Strecken $aq = aq_1 = a\mathrm{P}$, errichte auf G in P, auf G_1 in q und q_1 Senkrechte, welche einander in X und X_1 schneiden u. s. w., wie bei I.

Beweis II. Ziehe $\mathrm{X}q$, so ist

$$a\mathrm{P} = aq,$$
$$a\mathrm{X} = a\mathrm{X},$$
$$\sphericalangle a\mathrm{PX} = \sphericalangle aq\mathrm{X},$$

also:

$$\sphericalangle a\mathrm{PX} \cong \triangle aq\mathrm{X},$$

folglich:

$$\mathrm{PX} = \mathrm{X}q.$$

Erkl. 31. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und die Gegenwinkel der grösseren dieser Seiten entsprechend gleich haben.

Konstruktion III. Fälle (Fig. 17) von P auf G_1 das Lot $\mathrm{P}r$, errichte auf G in P die Senkrechte $b\mathrm{P}b_1$, halbiere die Winkel $b\mathrm{P}r$ und $b_1\mathrm{P}r$; die Halbierungsgeraden schneiden G_1 in q und q_1, errichte auf G_1 in q und q_1 Lote, welche $\mathrm{P}b$ und $\mathrm{P}b_1$ in X und X_1 schneiden u. s. w.

Beweis III. Nach Konstruktion ist $q\mathrm{X} \perp G_1$ und $\mathrm{P}r \perp G_1$, also:

$$q\mathrm{X} \parallel r\mathrm{P},$$

also:

$$\sphericalangle r\mathrm{P}q = \sphericalangle \mathrm{P}q\mathrm{X} \text{ (siehe Erkl. 28),}$$

ferner ist nach Konstruktion:

$$\sphericalangle r\mathrm{P}q = \sphericalangle q\mathrm{PX},$$

daher:

$$\sphericalangle \mathrm{P}q\mathrm{X} = \sphericalangle q\mathrm{PX},$$

folglich ist $\mathrm{XP}q$ gleichschenklig, oder

$$\mathrm{XP} = \mathrm{X}q.$$

Analog ist der Beweis für Kreis X_1.

Erkl. 32. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Determination. Es gibt stets zwei Lösungen, so lange G und G_1 nicht parallel sind, im letzteren Falle ist nur eine Lösung möglich.

Aufgabe 38. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei Parallelen, und zwar die eine in einem gegebenen Punkt berührt.

Gegeben: G, $G_1 \parallel$ G, P auf G.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 18.

q G₁ X G P

Konstruktion. Errichte (Fig. 18) auf G in P das Lot, welches G_1 in q schneidet, beschreibe um die Mitte X von Pq einen Kreis mit XP, so ist dieser der gesuchte.

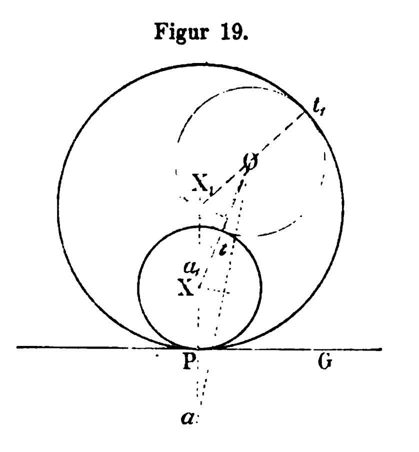
Beweis folgt aus Frage 16.

Aufgabe 39. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt und ausserdem einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: G, P in G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 19.



(S. Erkl. 19.) Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke über der nämlichen Grundlinie liegen auf deren Mittellot und umgekehrt: Ein Dreieck, in welchem eine Höhe die zugehörige Seite oder den zugehörigen Winkel halbiert, ist gleichschenklig.

Erste Auflösung.

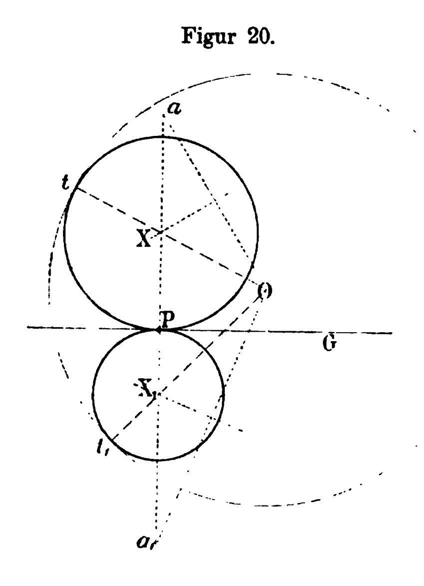
Analysis. Angenommen der gesuchte Kreis X berühre den gegebenen Kreis O (Fig. 19 und 20) in t, so liegen O, t, X auf einer Geraden (siehe Erkl. 22). Nun sind XP und Xt einander gleich als Halbmesser des gesuchten Kreises, denkt man sich also auf XP noch die Strecke Pa = Ot = dem Halbmesser des gegebenen Kreises gemacht, so findet man durch Subtraktion oder Addition:

$$Xa = XO.$$

Man hat daher für X zwei geometrische Oerter: erstens das Lot auf G in P (siehe Frage 17), zweitens: das Mittellot von Oa (siehe Erkl. 19).

Konstruktion. Errichte auf G in P ein Lot, mache auf diesem von P aus die Strecke Pa (Pa_1) = dem Halbmesser r des gegebenen Kreises, ziehe Oa (Oa_1) und errichte darauf das Mittellot, welches jenes erste Lot in X

Figur 20.

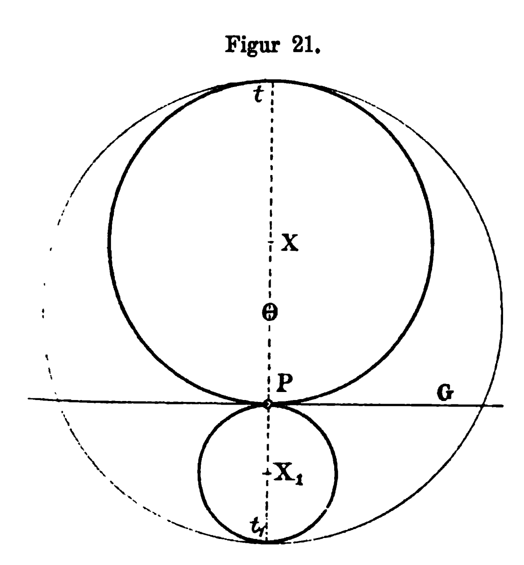


(X_1) trifft; beschreibe um X (X_1) mit Xa (X_1 a_1) einen Kreis, so ist dieser der gesuchte. Da die Strecke r auf dem Lote nach beiden Seiten abgetragen werden kann, erhält man zwei Berührungskreise.

Beweis. Es ist, wenn man O X zieht, welche den gegebenen Kreis in t schneidet, nach Konstruktion $Pa = Ot$, ferner wegen des Mittellots: $Xa = XO$, daraus ergiebt sich durch Addition oder Subtraktion: $XP = Xt$, d. h. der gesuchte Kreis berührt auch den gegebenen, w. z. b. w.

Analog ist der Beweis für den Kreis X_1.

Figur 21.



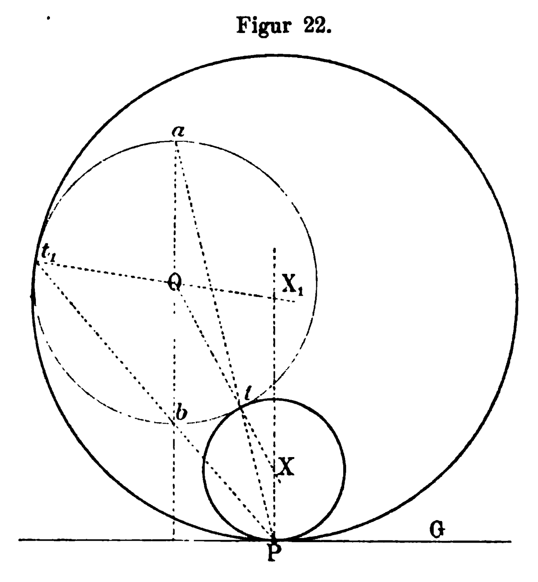
Determination. Man erhält stets zwei Lösungen, wenn nicht das Mittellot von aO oder a_1O parallel mit dem Lot P X wird; dies ist der Fall, wenn die gegebene Gerade den gegebenen Kreis berührt. In diesem Falle gibt es nur eine Lösung, die andere artet in die Gerade G selbst aus. Schneidet G den Kreis O nicht, so berührt von den Kreisen X und X_1 der eine den Kreis O von aussen, der andere umschliessend. Schneidet G den Kreis und liegt P ausserhalb des Kreises O, so erhält man auf jeder Seite von G einen den Kreis O von aussen berührenden Kreis. Schneidet G den Kreis und liegt P innerhalb des Kreises O, so berühren die gesuchten Kreise den gegebenen beide von innen.

Es gibt keine Lösung, wenn G den Kreis schneidet und P mit einem der Schnittpunkte zusammenfällt, es gibt unzählig viele Lösungen, wenn G den Kreis in P berührt.

Die angegebene Konstruktion wird hinfällig, wenn P auf dem zu G senkrechten Durchmesser $t\,t_1$ von Kreis O liegt.

In diesem Falle ist X Mitte von Pt, X_1 Mitte von Pt_1 (siehe Fig. 21).

Figur 22.



Erkl. 33. Wenn bei zwei durchschnittenen Geraden zwei Wechselwinkel oder zwei korrespondierende Winkel einander gleich sind, so sind die Geraden parallel.

Zweite Auflösung.

Analysis. Kreis X berühre (Fig. 22) den Kreis O in t; ziehe Pt bis zum zweiten Schnitt mit Kreis O in a, ziehe Oa, so sind die Dreiecke XPt und Oat gleichschenklig (siehe Erkl. 1), die Winkel PtX und atO sind einander gleich, also auch die Winkel XPt und Oat (siehe Erkl. 28), daher sind Oa und XP parallel, somit Oa senkrecht auf G; hierdurch ist a, also auch der Berührungspunkt t bekannt.

Ebenso verhält es sich mit dem Kreis X_1 und Berührungspunkt t_1, mit dem Unterschiede, dass hier die Winkel XPt_1 und Obt_1 nicht Wechselwinkel, sondern korrespondierende Winkel sind.

Konstruktion. Errichte auf G in P das Lot, ziehe den zu G senkrechten Durchmesser ab von Kreis O, ziehe Pa und Pb, welche Kreis O in t bezw. t_1 schneiden, ziehe Ot und Ot_1, welche das Lot in X bezw. X_1 schneiden, beschreibe um X und X_1 Kreise mit XP bezw. X_1P, so sind dies die gesuchten Kreise.

Beweis.

$\sphericalangle Oat = \sphericalangle XPt$ (als Wechselwinkel),

$\sphericalangle Obt_1 = \sphericalangle XPt_1$ (als korrespond. Winkel bei Parallelen),

$\sphericalangle Ota = \sphericalangle XtP$ (als Scheitelwinkel),

$\sphericalangle Ot_1b = \sphericalangle Xt_1P$,

$\sphericalangle Ota = \sphericalangle Oat$
$\sphericalangle Ot_1a = \sphericalangle Obt_1$ (siehe Erkl. 29),

daher:

$\sphericalangle XtP = \sphericalangle XPt$,

$\sphericalangle X_1t_1P = \sphericalangle X_1Pt_1$,

also:

$Xt = XP$
$X_1t_1 = X_1P$ (siehe Erkl. 32);

folglich geht der Kreis um X durch t, der um X_1 durch t_1, Kreis X und X_1 berühren daher Kreis O.

Aufgabe 40. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und ausserdem einen zweiten gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, P auf Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Erkl. 34. Die Senkrechte auf der gemeinsamen Zentrale im Berührungspunkt zweier Kreise ist Tangente an jeden der beiden Kreise.

Analysis. Wenn zwei Kreise einander berühren, so haben sie die Tangente im Berührungspunkt gemeinsam. Wenn man daher an Kreis Q in P die Tangente zieht, so ist die vorliegende Aufgabe auf die Aufgabe 39 zurückgeführt.

Aufgabe 41. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenem Punkte und ausserdem eine gegebene Gerade berührt.

Gegeben: G, Kreis um O, P auf Kreis O.

Gesucht: Kreis um X.

Erste Auflösung.

Analysis. Der gesuchte Kreis muss nach der Erklärung 34 auch die Tangente des Kreises O in P berühren, damit ist die Aufgabe auf die Aufgabe 38 zurückgeführt.

Zweite Auflösung.

Figur 23.

Analysis. Der gesuchte Kreis X (X_1) (Fig. 23) berühre die gegebene Gerade G in t (t_1). Ziehe tP (t_1P) bis zum zweiten Schnitt mit Kreis O in a (b), ziehe Oa (Ob), so sind die Dreiecke XPt (X_1Pt_1) und OPa (OPb) gleichschenklig (siehe Erkl. 1). Die Winkel bei P in diesen Dreiecken sind einander gleich, folglich auch:

$$\sphericalangle XtP = \sphericalangle OaP$$
$$(\sphericalangle X_1Pt_1 = \sphericalangle ObP),$$

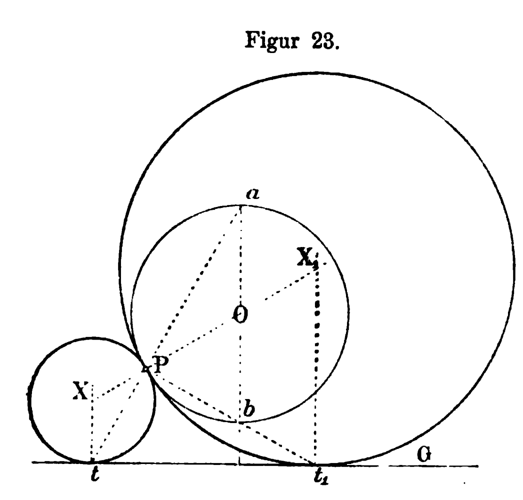
daher ist:

$$Oa \parallel Xt$$
$$(Ob \parallel Xt),$$

(siehe Erkl. 33), also ist aOb der zu G senkrechte Durchmesser des Kreises O, somit kennt man die Punkte a und b, also auch die Berührungspunkte t und t_1.

Konstruktion. Ziehe den zu G senkrechten Durchmesser ab des Kreises O, ziehe aP und bP, welche G in t bezw. t_1 treffen, errichte auf G in t und t_1 Lote, welche von OP in X bezw. X_1 geschnitten werden; beschreibe um X mit XP, um X_1 mit X_1P Kreise, so sind diese die gesuchten.

Figur 23.



Beweis. Kreis X berührt Kreis O in P nach Erklärung 4.

Dreieck OaP ist gleichschenklig nach Erklärung 1, also:

$$\sphericalangle XPt = \sphericalangle OPa,$$

aber:

$$\sphericalangle OPa = \sphericalangle XtP \text{ (siehe Erkl. 28)},$$

folglich:

$$\sphericalangle XtP = \sphericalangle XPt,$$

also Dreieck XPt gleichschenklig (Erkl. 32), daher ist $Xt = XP$, und da $Xt \perp G$, so berührt Kreis X die Gerade G in t.

Analog ist der Beweis für Kreis X_1.

Determination. Es gibt im allgemeinen zwei Lösungen.

Berührt G den Kreis in b, so fällt der Schnittpunkt von Pb mit G nach b, also X_1 nach O und es gibt nur eine Lösung.

Berührt G den Kreis in P, so genügt jeder beliebige Kreis, welcher G in P berührt, der Aufgabe.

Keine Lösung gibt es, wenn die Gerade den Kreis schneidet und P mit einem der Schnittpunkte zusammenfällt.

Liegt die Gerade ausserhalb des Kreises, so berührt einer der gesuchten Kreise den gegebenen von aussen, der andere umschliessend. Schneidet G den Kreis, so liegt der eine der gesuchten Kreise ausserhalb, der andere innerhalb des gegebenen.

Eine einzige Lösung erhält man auch in dem Falle, wo P mit einem der Endpunkte a oder b des auf G senkrechten Durchmessers von Kreis O zusammenfällt. Punkt X fällt dann in die Mitte des Abstands zwischen P und G.

Aufgabe 42. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen zweiten gegebenen Punkt geht.

Gegeben: G, P auf G, P_1.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Ein geometrischer Ort für X ist die Senkrechte auf G in P, (siehe Frage 17), ein zweiter das Mittellot auf P P_1 (siehe Frage 14).

Aufgabe 43. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und durch einen zweiten gegebenen Punkt geht.

Gegeben: Kreis um O, P auf Kreis um O, P_1.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Geometrische Oerter für X ergeben sich aus Frage 18 und Frage 14.

Aufgabe 44. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden so berührt, dass die Sehne zwischen den Berührungspunkten eine gegebene Länge hat.

Gegeben: s, G, G_1.

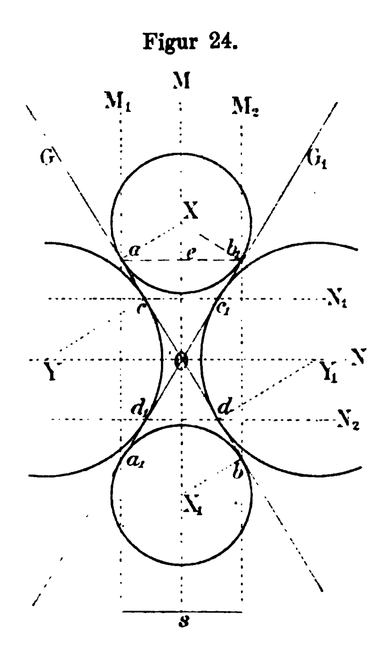
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Ein geometrischer Ort für X ist das Geradenpaar, welches die Winkel zwischen G und G_1 halbiert (siehe Frage 15). Die Halbierungsgerade ist Mittellot der Berührungssehne, daher haben die Berührungspunkte von der Halbierungsgeraden den Abstand $1/2\ s$.

Sind die Berührungspunkte gefunden, so ergibt sich der Mittelpunkt aus Erkl. 17.

Erkl. 35. Die Sehne zwischen den Berührungspunkten zweier Tangenten steht senkrecht auf der Zentrale des Schnittpunkts der Tangenten und wird von ihr halbiert.

Figur 24.



Konstruktion. (Fig. 24.) Halbiere die Winkel am Schnittpunkt O der gegebenen Geraden. Die Halbierungsgeraden seien M und N.

Ziehe zu M im Abstand $1/2\ s$ die Parallelen M_1 und M_2 (siehe Anmerkung 8), zu N im gleichen Abstand die Parallelen N_1 und N_2.

M_1	schneidet G	und G_1	in	a	und	a_1
M_2	„ „	„ „	„	b	„	b_1
N_1	„ „	„ „	„	c	„	c_1
N_2	„ „	„ „	„	d	„	d_1

Errichte auf G in den Punkten a, b, c, d Lote, diejenigen Lote, welche durch a und b gehen, schneiden M in X und X_1, die Lote durch c und d schneiden N in Y und Y_1; beschreibe um X und X_1 mit aX, um Y und Y_1 mit cY Kreise. Diese sind die gesuchten.

Beweis. Ziehe ab, welche M in e trifft, so ist:

$$ae = b_1 e \quad \text{(siehe Erkl. 36)},$$

$$\sphericalangle aOe = \sphericalangle b_1 Oe \quad \text{(nach Konstruktion)}$$

und

$$Oe = Oe,$$

daher:

$$\triangle aOe \cong \triangle b_1 Oe$$

folglich:

$$Oa = Ob_1,$$

ferner:

$$OX = OX$$

$$\sphericalangle aOX = \sphericalangle b_1 OX,$$

also:

$$\triangle OaX \cong \triangle b_1 OX,$$

also:

Erkl. 36. Jede Strecke zwischen zwei Parallelen wird durch die Mittelparallele halbiert.

Erkl. 37. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel der kleineren gleich haben und beide Dreiecke stumpfwinklig oder beide spitzwinklig sind.

$$Xb_1 = Xa$$

und

$$\sphericalangle XaO = \sphericalangle Xb_1O = 90^0,$$

daher berührt der Kreis um X mit Xa die Gerade G_1 in b_1, w. z. b. w.

Analog ist der Beweis für die anderen Kreise.

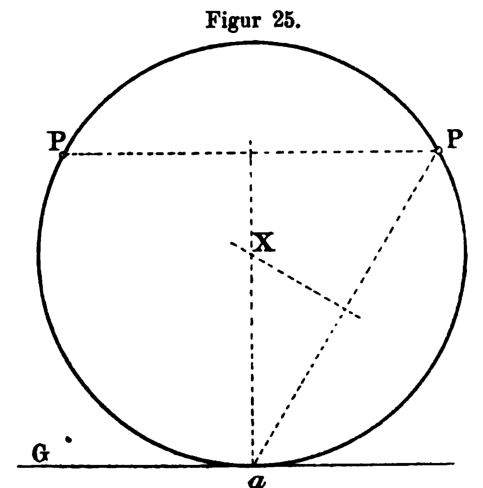
Determination. Es gibt stets vier Berührungskreise, welche der Aufgabe genügen; dieselben sind zu je zweien einander gleich und ihre Mittelpunkte symmetrisch gegen O gelegen. Schneiden die gegebenen Geraden einander rechtwinklig, so werden alle vier Kreise einander gleich.

Aufgabe 45. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine zur Verbindungsstrecke der Punkte parallele Gerade berührt.

Gegeben: P, P_1, G || PP_1.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 25.



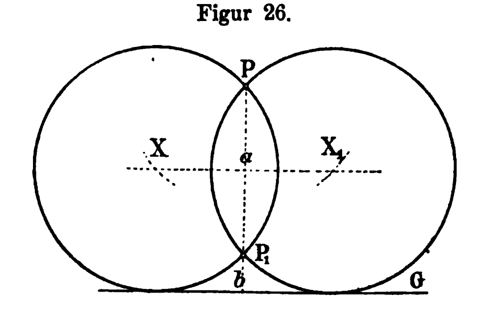
Analysis. X muss auf dem Mittellot von PP_1 liegen (siehe Frage 14); dieses steht auf G senkrecht, weil G || PP_1 ist, also ist der Schnittpunkt a des Mittellots mit G Berührungspunkt. Die Aufgabe ist daher auf die einfachere zurückgefürt: Einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu legen, oder den Umkreis eines Dreiecks zu zeichnen (siehe *Kleyer* und *Sachs*, Lehrbuch der Planimetrie).

Aufgabe 46. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine auf ihrer Verbindungsstrecke senkrechte Gerade berührt.

Gegeben: P, P_1, G ⊥ PP_1.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 26.



Analysis. Die Gerade darf nicht zwischen P und P_1 hindurchgehen, weil sonst der Schnittpunkt von PP_1 mit G ein Punkt innerhalb des Kreises wäre, also G den Kreis schneiden würde.

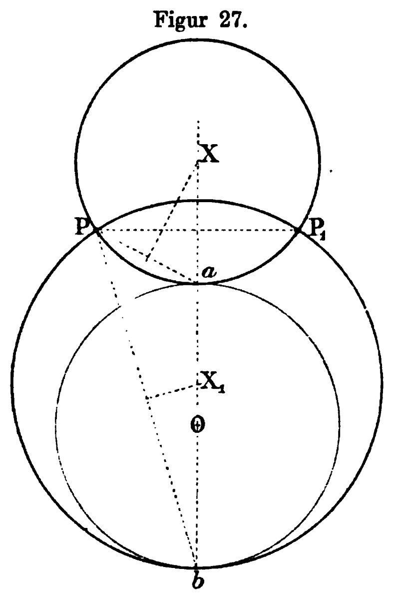
Geometrischer Ort für X (Fig. 26) ist das Mittellot auf PP_1 (siehe Frage 14); dieses ist || mit G, folglich ist der Halbmesser des gesuchten Kreises der Abstand ab des Mittellots von G, und ein zweiter geometrischer Ort für X ist der Hilfskreis um P (oder P_1) mit ab.

Aufgabe 47. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen Kreis berührt, dessen Mittelpunkt von den gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

Gegeben: P, P_1, Kreis um O, $OP = OP_1$.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 27.



Analysis. (Fig. 27). Geometrischer Ort für X ist das Mittellot auf PP_1 (siehe Frage 14), auf diesem liegt auch der gegebene Mittelpunkt O (siehe Erkl. 19).

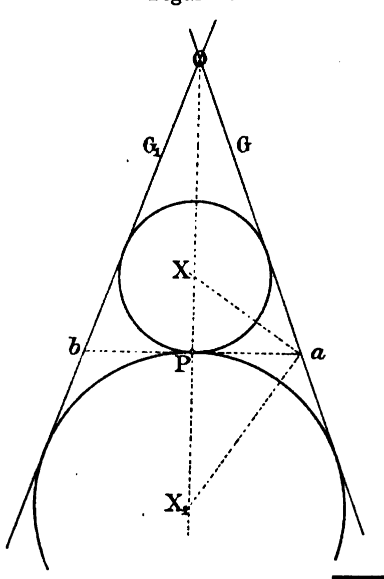
Das Mittellot schneide den Kreis O in *a* (*b*), so liegen O, *a* (*b*), X in gerader Linie, also ist *a* (*b*) der Berührungspunkt (siehe Erkl. 22), und man hat die Aufgabe: durch die drei Punkte P, P_1, *a* (*b*) einen Kreis zu legen.

Aufgabe 48. Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt und durch einen gegebenen Punkt auf der Halbierungsgeraden des Winkels geht.

Gegeben: $\sphericalangle GOG_1$, P auf der Halbierungsgeraden von $\sphericalangle GOG_1$.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 28.



Analysis. Der gesuchte Kreis (Fig. 28) hat seinen Mittelpunkt auf der Halbierungsgeraden OP (siehe Frage 15), also ist seine Tangente in P senkrecht zu OP, diese schneide G in *a*, so ist ein zweiter geometrischer Ort für X die Halbierungsgerade des Winkels zwischen P*a* und G (siehe Frage 15).

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 49. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch drei gegebene Punkte geht. (Den Umkreis eines Dreiecks zu zeichnen.)

Aufgabe 50. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Geraden berührt, von denen keine der anderen parallel ist. (Inkreis und Ankreise eines Dreiecks zu zeichnen.)

Aufgabe 51. Einen Kreis zu zeichnen der durch zwei gegebene Punkte geht und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie (Gerade oder Kreis) liegt.

Aufgabe 52. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Geraden berührt und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie (Gerade oder Kreislinie) liegt.

Aufgabe 53. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie (Gerade oder Kreis) liegt.

Aufgabe 54. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkt berührt und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Linie (Gerade oder Kreis) liegt.

Aufgabe 55. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Parallelen und eine sie schneidende Gerade berührt.

Aufgabe 56. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Parallelen und einen Kreis berührt. (Der Kreis muss mindestens eine der Parallelen schneiden.)

Aufgabe 57. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Parallelen berührt und durch einen gegebenen, zwischen den Parallelen liegenden Punkt geht.

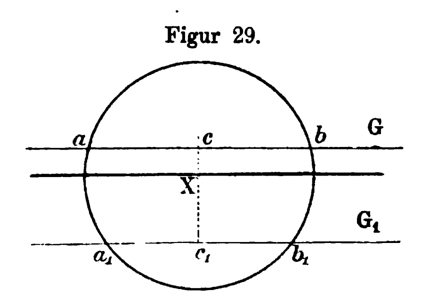
Aufgabe 58 und 59. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Parallelen berührt und eine dritte gegebene Gerade oder einen gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Aufgabe 60, 61, 62. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Parallelen berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet oder halbiert oder von dem gegebenen Kreis halbiert wird.

Aufgabe 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69. Einen Kreis zu zeichnen, welcher von zwei gegebenen Parallelen die eine berührt, die andere nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet und ausserdem
- durch einen gegebenen Punkt geht, oder
- eine gegebene Gerade berührt, oder
- einen gegebenen Kreis berührt, oder
- einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, oder
- einen gegebenen Kreis halbiert, oder
- von einem gegebenen Kreis halbiert wird.

Aufgabe 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76. Einen Kreis zu zeichnen, welcher jede von zwei gegebenen Parallelen nach einer Sehne von bekannter Länge schneidet und ausserdem eine der in Aufgabe 63 bis 69 angegebenen Bedingungen erfüllt.

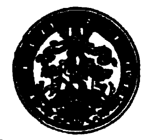
Figur 29.



Andeutung zu den Aufgaben 70 bis 76 (Fig. 29). Lege beide Sehnen auf die Parallelen so hin (ab und a_1b_1), dass ihre Mitten c und c_1 auf einer Senkrechten zu G liegen, und zeichne einen Hilfskreis durch a, b, a_1, so geht dieser Kreis auch durch b_1 (siehe Erkl. 15) und eine Parallele zu G durch seinen Mittelpunkt ist geometrischer Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

847. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben. Forts. v. Heft 846. — Seite 33—48. Mit 17 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 846. — Seite 33—48. Mit 17 Figuren.

Inhalt:

Berührungsaufgaben, durch Versuche gelöst. — Die Hauptaufgaben des Berührungsproblems, gelöst durch Proportionen.

Stuttgart 1890.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint **monatlich** in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln **angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der **eigenen Lösung** (in **analoger Form,** wie die **bezüglichen gelösten Aufgaben**) des Studierenden **überlassen** bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt werden können.** — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des** Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.**

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende **Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

B. Berührungsaufgaben, durch Versuche gelöst.

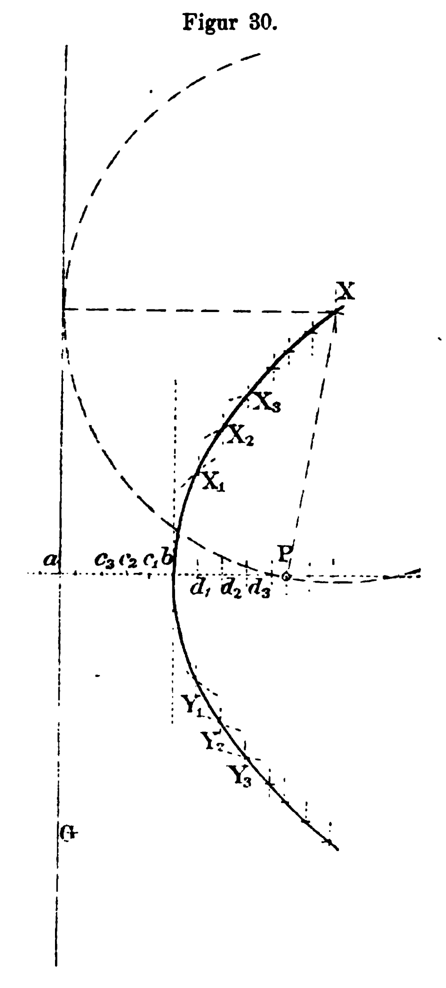
Anmerkung 12. Für viele Fälle, namentlich des technischen Zeichnens, kommt es weniger auf theoretisch richtige Lösung geometrischer Aufgaben an, als darauf, mit hinreichender Genauigkeit eine Zeichnung herzustellen. Zu diesen Fällen gehören besonders die Aufgaben der Kreisberührung. Durch ein methodisches Probieren kommt ein geübter Zeichner häufig rascher zum Ziel als durch geometrische Konstruktion, besonders wenn letztere viele Hilfslinien enthält. Im Folgenden ist Anleitung gegeben, wie Kreisberührungsaufgaben durch methodische Versuche graphisch gelöst werden können.

Aufgabe 77. Beliebig viele Punkte des geometrischen Orts für den Mittelpunkt eines Kreises zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

Gegeben: P und G.

Gesucht: Geometrischer Ort für den Mittelpunkt X eines Kreises.

Figur 30.



Analysis. (Fig. 30.) Es sei X der Mittelpunkt eines Kreises, der durch P geht und G berührt. Wäre der Halbmesser gegeben, so würde man X erhalten nach Aufgabe 2 mit Hilfe einer Parallele zu G und eines Hilfskreises um P. Man wird daher beliebig viele Punkte X erhalten, wenn man für beliebig viele Werte von ϱ die Aufgabe 2 wiederholt. Ein Punkt des gesuchten geometrischen Orts ist jedenfalls die Mitte b des von P auf G gefällten Lots Pa.

Konstruktion. Fälle von P auf G das Lot Pa und halbiere es in b. Trage von P aus gegen a und von a aus gegen P hin die beliebigen Strecken $Pc_1 = ad_1$, $Pc_2 = ad_2$, $Pc_3 = ad_3$ etc. ab, sämtlich grösser als $^1/_2$ Pa, ziehe durch die Punkte $d_1, d_2, d_3 \ldots$. Parallelen zu G und beschreibe um P durch die Punkte $c_1, c_2, c_3 \ldots$. Kreisbögen. Jeder Kreisbogen schneidet die zugehörige Parallele in zwei Punkten X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3; .... Diese Punkte, durch eine stetig

Erkl. 38. Der gefundene geometrische Ort ist eine zur Gattung der sogenannten Kegelschnitte oder Kurven zweiten Grads gehörige krumme Linie und heisst Parabel.

Die Parabel ist also der geometrische Ort eines Punkts, welcher von einem festen Punkt und einer festen Geraden gleichen Abstand hat. Der feste Punkt heisst Brennpunkt, die feste Gerade heisst Leitlinie, die Senkrechte vom Brennpunkt auf die Leitlinie heisst Axe der Parabel.

gekrümmte Linie verbunden, geben den gesuchten geometrischen Ort.

Beweis folgt aus Aufgabe 2.

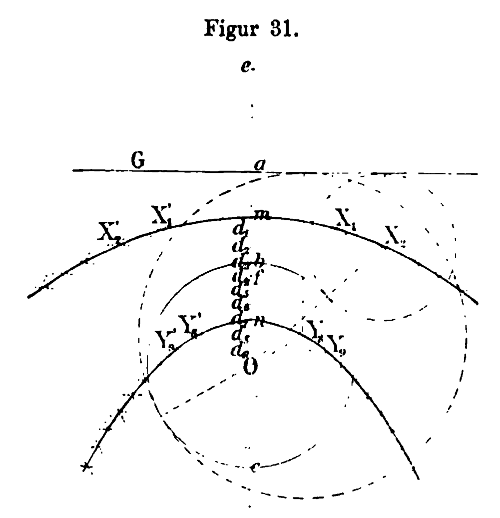
Aufgabe 78. Beliebig viele Punkte des geometrischen Orts für den Mittelpunkt eines Kreises zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: G und Kreis um O.

Gesucht: Geometrischer Ort für den Mittelpunkt X eines Kreises.

Analysis. Wäre der Halbmesser der gesuchten Kreise fest, so würde die Aufgabe 5 vorliegen. Man wird daher beliebig viele Punkte des gesuchten geometrischen Orts erhalten, wenn man Aufgabe 5 für beliebig viele Werte von ϱ löst.

Figur 31.



Konstruktion. I. Fall: Die Gerade schneidet den Kreis nicht.

Fälle von O auf die Gerade das Lot O*a*, welches den Kreis in *b* und *c* trifft (*b* liegt der Geraden näher als *c*). Halbiere *ab* und *ac* in *m* und *n*, so wird der gesuchte geometrische Ort durch *m* und *n* gehen.

Wähle auf der Seite von *m*, welche von der Geraden entfernt ist, eine Reihe von Punkten: d_1, d_2, d_3 .... etc., ziehe durch dieselben Parallelen zu G. Trage den Halbmesser von Kreis O auf O*a* von *a* aus beiderseits gegen *e* und *f* (*e* liegt auf der anderen Seite von G als der Kreis), und beschreibe um O Kreise mit den Halbmessern ed_1, ed_2, ed_3..etc., ebenso mit fd_1, fd_2, fd_3.... etc. Die Kreise und ihre zugehörigen Parallelen schneiden einander in den Punktepaaren:

X_1, X'_1, X_2, X'_2, X_3, X'_3 ....

und

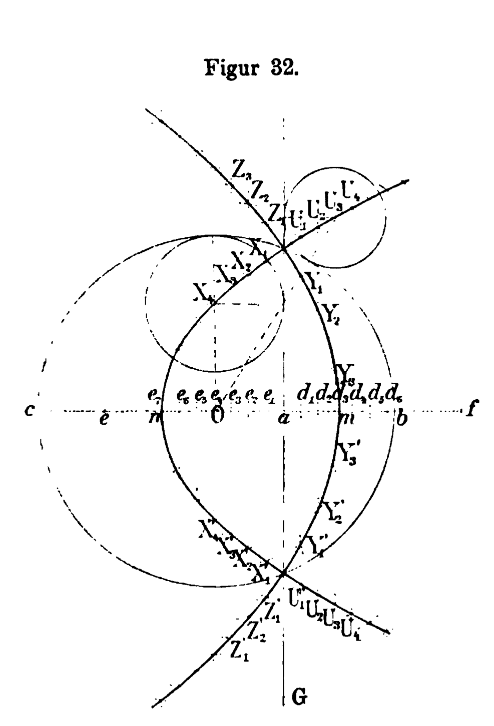
Y_8, Y'_8, Y_9, Y'_9, Y_{10}, Y'_{10} ....

Die ersteren Punkte sind die Mittelpunkte solcher Kreise, welche den gegebenen Kreis von aussen berühren.

Die zweiten Punktepaare kommen nur auf denjenigen Parallelen vor, deren Abstand von G grösser als *an* ist, und sind die Mittelpunkte solcher Kreise, welche den Kreis O umschliessend berühren.

Erkl. 39. Der fragliche geometrische Ort besteht aus zwei getrennten Parabeln, deren Leitlinien durch die Punkte e und f parallel mit G gehen, und deren gemeinsamer Brennpunkt O ist. Die Parabeln schneiden einander nicht.

Figur 32.



Erkl. 40. Der gesuchte geometrische Ort besteht aus zwei getrennten Parabeln mit dem gemeinsamen Brennpunkt O, welche einander ihre hohle Seite zukehren und durch die Schnittpunkte des Kreises und der Geraden gehen. Ihre Leitlinien sind die Parallelen zu G durch e und f.

Beweis. Denkt man sich um X_2 einen Kreis mit Halbmesser $a d_2 = \varrho_2$ beschrieben, so berührt derselbe die Gerade G (siehe Erklärung 10). Ferner ist:

$$OX_2 = e d_2 = e a + a d_2 = r + \varrho_2,$$

folglich berührt der Kreis X_2 den Kreis um O mit r (siehe Erkl. 4). Denkt man sich noch einen Kreis um Y_8 mit $a d_8 = \varrho_8$ beschrieben, so berührt dieser die Gerade G (siehe Erkl. 10). Ferner ist:

$$OY_8 = f d_8 = a d_8 - a f = \varrho_8 - r,$$

also berührt der Kreis um Y_8 mit ϱ_8 den Kreis um O mit r (siehe Erkl. 4).

II. Fall: Die Gerade schneidet den Kreis.

Ziehe den zu G senkrechten Durchmesser bc (b jenseits des Mittelpunkts), welcher G in a schneidet. Trage auf ihm von a aus den Halbmesser r von Kreis O nach e und f (f jenseits des Mittelpunkts). Wähle auf bc zu beiden Seiten von a die Punkte d_1, e_1, d_2, e_2, d_3, e_3 .... etc. und ziehe durch sie Parallelen zu G. Beschreibe um O Kreise mit den Halbmessern ee_1, ee_2, ee_3 etc., welche die Parallelen durch e_1, e_2, e_3 etc. in den Punktepaaren X_1, X'_1; X_2, X'_2 etc. innerhalb des Kreises schneiden. Kreise um O mit den Halbmessern ed_1, ed_2, ed_3 etc. schneiden die Parallelen durch d_1, d_2, d_3 etc. in den Punktepaaren U_1, U_1'; U_2, U_2' etc. ausserhalb des Kreises.

Beschreibe ferner um O Kreise mit den Halbmessern fd_1, fd_2 etc, welche die Parallelen durch d_1, d_2 etc. in den Punktepaaren Y_1, Y'_1; Y_2, Y'_2 etc. innerhalb des Kreises schneiden. Kreise um O mit den Halbmessern fe_1, fe_2, fe_3 etc. schneiden die Parallelen durch e_1, e_2, e_3 etc. in den Punktepaaren Z_1, Z'_1; Z_2, Z'_2; Z_3, Z'_3 etc. ausserhalb des Kreises.

Halbiere endlich ab in m, ac in n und verbinde die Punktepaare X und U mit n, ebenso die Punktepaare Y und Z mit m durch zwei stetige krumme Linien, welche beide durch die Schnittpunkte des Kreises und der Geraden gehen, so geben dieselben zusammen den gesuchten geometrischen Ort.

Beweis. Beschreibt man mit $ad_3 = \varrho_3$ um U_3 einen Kreis, so berührt derselbe die Gerade G (siehe Erkl. 10); es ist aber:

$$OU_3 = ed_3 = ea + a d_3 = r + \varrho_3,$$

daher berührt der Kreis um U_3 mit ϱ_3 den Kreis um O mit r (siehe Erkl. 4). Ebenso ist der Halbmesser des Kreises

$$X_4 = a\,e_4$$

und

$$OX_4 = e\,e_4 = e\,a - a\,e_4 = r - \varrho_4.$$

Aufgabe 79. Beliebig viele Punkte des geometrischen Orts für den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, welcher einen gegebenen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

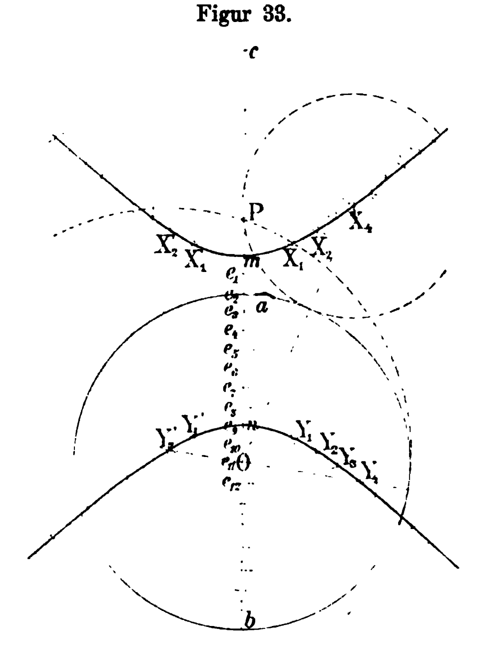
Gegeben: P und Kreis um O.

Gesucht: Geometrischer Ort für den Mittelpunkt X eines Kreises.

I. Der Punkt P liege ausserhalb des gegebenen Kreises.

Analysis. Denkt man sich den Halbmesser des gesuchten Kreises gegeben, so hat man die Aufgabe 3 zu lösen, welche bis zu 4 Lösungen zulässt. Verändert man den Wert von ϱ, so erhält man beliebig viele Punkte des gesuchten geometrischen Orts.

Figur 33.



Konstruktion. Ziehe OP, welche den gegebenen Kreis in a (näher bei P) und b schneidet; trage auf OP von P aus den Halbmesser des gegebenen Kreises auf der von O abgewendeten Seite nach c und halbiere Pa in m, Pb in n. Wähle auf PO von m gegen O hin eine Reihe von Punkten: $e_1, e_2, e_3, e_4 \ldots$ und beschreibe um P Kreise mit den Halbmessern $Pe_1, Pe_2, Pe_3 \ldots$ Beschreibe um O Kreise mit den Halbmessern $ce_1, ce_2, ce_3, ce_4 \ldots$, welche die ersten in den Punktepaaren $X_1, X'_1; X_2, X'_2; X_3, X'_3; \ldots$ schneiden. Beschreibe ebenso um O mit den Halbmessern $Pe_1, Pe_2, Pe_3 \ldots$ und um P mit den Halbmessern $ce_1, ce_2, ce_3, ce_4 \ldots$ Kreise, welche einander in den Punktepaaren $Y_1, X'_1; Y_2, Y'_2; Y_3, Y'_3 \ldots$ schneiden.

Verbinde die Punkte X und den Punkt m, ebenso die Punkte Y und n durch stetig gekrümmte Linien, so bilden diese zusammen den gesuchten geometrischen Ort.

Erkl. 41. Der gesuchte geometrische Ort besteht aus zwei getrennten Zweigen, welche gegen das Mittellot von PO symmetrisch liegen und zusammen Hyperbel genannt werden. Die Hyperbeln gehören ebenfalls zur Gattung der sogenannten Kegelschnitte oder Kurven zweiten Grads.

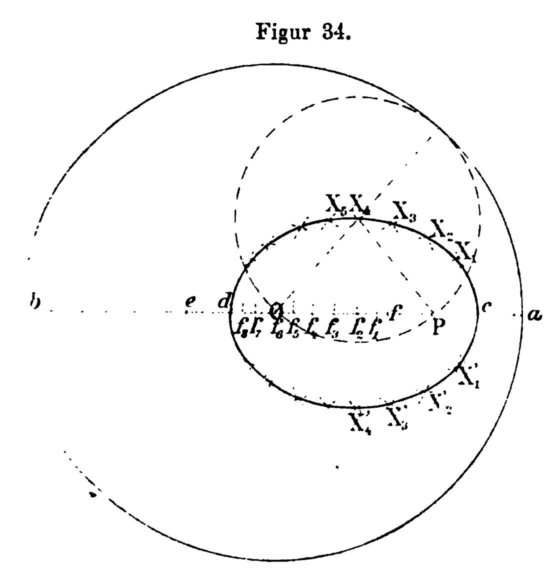
Beweis. Ein Kreis um X_4 mit Halbmesser X_4P geht durch P (siehe Erkl. 3); nach Konstruktion ist aber:

$$X_4O = ce_4 = cP + Pe_4 = r + X_4P = r + \varrho,$$

daher berührt Kreis X_4 den Kreis um O

Eine **Hyperbel** ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Differenz haben. Die festen Punkte nennt man **Brennpunkte**, ihre Verbindungsgerade schneidet die Hyperbel in zwei Punkten (in der Figur 33: in m und n), den **Scheiteln**, der Abstand der Scheitel heisst **Axe** der Hyperbel.

Figur 34.



mit r (siehe Erkl. 4). Ebenso geht Kreis Y'_2 mit Halbmesser ce_2 durch P, weil nach Konstruktion $ce_2 = PY'_2$; aber es ist:

$$OY'_2 = Pe_2 = Pe_2 - cP = \varrho - r,$$

folglich umschliesst Kreis Y'_2 den Kreis O (siehe Erkl. 4).

II. Der gegebene Punkt liegt im Kreis.

Analysis. Analog wie bei I.

Konstruktion. Ziehe OP (Fig. 34), welche den Kreis in a und b schneidet, (a näher bei P); halbiere Pa in c, Pb in d. Trage den Halbmesser des Kreises von P gegen b hin nach e, und die Strecke Pc von P gegen b hin nach f. Wähle zwischen f und d eine Reihe von Punkten f_1, f_2, f_3 ....; beschreibe um P Kreise mit den Halbmessern Pf_1, Pf_2, Pf_3 .... und um O Kreise mit den Halbmessern ef_1, ef_2, ef_3 .... Diese Kreise schneiden einander in den Punktepaaren X_1, X'_1; X_2, X'_2 ...., welche untereinander durch eine stetig gekrümmte, auch durch c und d gehende Linie verbunden, den gesuchten geometrischen Ort ausmachen.

Erkl. 42. Der gesuchte geometrische Ort bildet eine ovale geschlossene Linie, welche ebenfalls zur Gattung der Kegelschnitte gehört und **Ellipse** genannt wird.

Eine Ellipse ist der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Summe haben. Die festen Punkte heissen **Brennpunkte** der Ellipse. Das in die Ellipse fallende Stück der Verbindungsgeraden der Brennpunkte heisst **grosse Axe**, das in die Ellipse fallende Stück des Mittellots der grossen Axe heisst **kleine Axe**. Die Endpunkte der Axen heissen **Scheitel**, ihr Schnittpunkt heisst **Mittelpunkt**, die Entfernung des Mittelpunkts von jedem der Brennpunkte heisst **Exzentrizität** der Ellipse.

Beweis. Ein Kreis um X_4 mit Halbmesser $\varrho_4 = Pf_4$ geht durch P, da nach Konstruktion $Pf_4 = PX_4$ ist (siehe Erkl. 4). Es ist aber:

$$OX_4 = ef_4 = eP - Pf_4 = r - \varrho_4,$$

daher berührt Kreis X_4 den gegebenen Kreis (siehe Erkl. 4).

Aufgabe 80. Beliebig viele Punkte des geometrischen Orts für den Mittelpunkt eines Kreises anzugeben, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

a). Die Kreise liegen ganz oder teilweise auseinander, der gesuchte Kreis berührt beide von aussen oder beide von innen oder beide umschliessend.

Andeutung. Die Mittelpunkte werden gefunden, indem man für den Halbmesser des gesuchten Kreises beliebige Werte nimmt und die Aufgabe 6 löst.

Man erhält als geometrischen Ort:

bei a).: eine Hyperbel;

b). Die Kreise liegen ganz auseinander, der gesuchte Kreis berührt den einen von aussen, den andern umschliessend.

bei b).: eine Hyperbel;

c). Die Kreise schneiden einander oder der eine Kreis liegt im andern, der gesuchte Kreis berührt den einen von aussen, den andern von innen.

bei c).: eine Ellipse.

Anmerkung 13. Mit Hilfe der in den Aufgaben 77 bis 80 näherungsweise konstruierten geometrischen Oerter lassen sich die schwierigeren der in Frage 5 erwähnten Aufgaben, allerdings nicht auf elementarplanimetrischem Wege, lösen. Man zeichnet von dem in Frage kommenden geometrischen Orte nur ein kleines Stück in der Umgebung des Punktes, welchen man nach dem Augenmaas als Mittelpunkt des Kreises erkennt. Es soll von den vielen oft vorkommenden Aufgaben nur eine behandelt werden; der praktische Zeichner, für welchen diese Aufgaben von Wert sind, wird andere nach diesem Muster lösen können.

Aufgabe 81. In einen von drei gegebenen Kreisbögen umschlossenen Raum einen Berührungskreis durch methodisches Probieren einzuzeichnen.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um P, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 35.

Analysis. Der Raum I, II, III in Fig. 35 ist von drei Kreisbögen eingeschlossen, von denen einer (mit dem Mittelpunkt P) dem Innern des Raumes seine konvexe, die beiden andern ihre konkave Seite zuwenden. Durch den gesuchten Mittelpunkt X, dessen ungefähre Lage sich nach dem Augenmass ergibt, müssen drei krummlinige geometrische Oerter gehen. Der eine enthält die Mittelpunkte der Kreise, welche P von aussen und O von innen, der zweite die Mittelpunkte derjenigen, welche P von aussen und Q von innen, der dritte die Mitten der Kreise, welche O und Q von innen berühren.

Es ist also der Halbmesser von P um das gleiche Stück zu verlängern, um welches die Halbmesser von O und Q zu verkürzen sind; mit den so verlängerten bezw. verkürzten Halbmessern sind um die gegebenen Mittelpunkte konzentrische Kreise zu beschreiben (siehe Frage 8), und jenes Stück ist dabei so zu wählen, dass die drei konzentrischen Kreise durch einen Punkt gehen.

Konstruktion. Ziehe die drei beliebigen Halbmesser Oa, Pb, Qc; trage auf dem zweiten von b nach aussen, auf den beiden andern von a und c nach innen die beliebigen aber gleichen Strecken:

$$a a_1 = b b_1 = c c_1$$

$$a a_2 = b b_2 = c c_2$$

$$a a_3 = b b_3 = c c_3$$

ab; beschreibe um O, P, Q konzentrische Kreise mit den Halbmessern Oa_1, Pb_1, Qc_1, so schliessen diese, wenn aa_1 etwas grösser als der gesuchte Halbmesser gewählt war, ein schildförmiges Bogendreieck $o_1 p_1 q_1$ ein, innerhalb dessen der gesuchte Mittelpunkt liegen muss; die Kreisbögen um O und Q wenden dem Mittelpunkt die konvexe, der um P die konkave Seite zu. Ein zweites, kleineres Bogendreieck $o_2 p_2 q_2$ erhält man mit den Halbmessern Oa_2, Pb_2, Qc_2, wobei die Strecken aa_2, bb_2, cc_2 immer noch zu gross, aber kleiner als vorher sind. Dieses Bogendreieck hat dieselbe Lage wie $o_1 p_1 q_1$. Die Kreisbögen mit Oa_3, Pb_3, Qc_3 liefern ein drittes Bogendreieck $o_3 p_3 q_3$ in umgekehrter Lage wie die ersten, was ein Beweis dafür ist, dass die Strecke $aa_3 = bb_3 = cc_3$ zu klein ist, also der gesuchte Halbmesser zwischen aa_2 und aa_3 liegen muss.

Man verbinde nun die Punkte $o_1 o_2 o_3$, ebenso $p_1 p_2 p_3$ und $q_1 q_2 q_3$ je durch eine stetig gekrümmte Linie mit Hilfe des Kurvenlineals, so schneiden sich dieselben im gesuchten Mittelpunkte X. Dieser gibt, mit O, P, Q verbunden, die Berührungspunkte o, p, q und den Halbmesser des gesuchten Kreises $Xo = Xp = Xq$.

Beweis folgt aus Analysis und aus Aufgabe 80.

Anmerkung 14. Sehr geübte Zeichner konstruieren nur ein Stück von einem der drei geometrischen Oerter und suchen auf diesem durch Probieren den Mittelpunkt X.

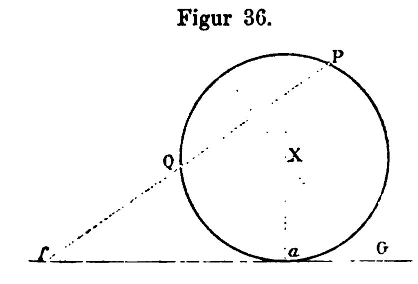
C. Die Hauptaufgaben des Berührungsproblems, gelöst durch Proportionen.

Aufgabe 82. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Gegeben: P, Q, G.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 36.



Analysis. Der Kreis X in Fig. 36 gehe durch die Punkte P und Q und berühredie Gerade G in a; ein geometrischer Ort für X ist das Mittellot auf PQ (siehe Frage 14). Wäre der Berührungspun kt a bekannt,so wäre ein zweiter geometrischer Ort für X die Senkrechte auf G in a (siehe Frage 1). Um diesen Berührungspunkt zu finden, denke man sich PQ bis zum Schnitt mit G in f verlängert, so gehen von f aus an den ge-

Erkl. 43. Ein bekannter planimetrischer Lehrsatz, Sekanten-Tangentensatz, lautet: Gehen von einem Punkte ausserhalb eines Kreises mehrere Sekanten an einen Kreis, so ist das Rechteck der Abschnitte jeder Sekante vom Punkt bis an jeden der Schnittpunkte konstant, und zwar gleich dem Quadrat der vom Punkt an den Kreis gelegten Tangente, oder:

Die Tangente ist mittlere Proportionale zu jeder ganzen Sekante und ihrem äusseren Abschnitt (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. der Planimetrie).

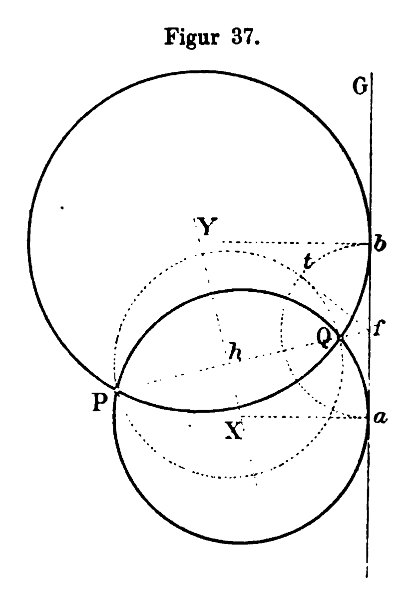
Jenes konstante Produkt der Sekantenabschnitte heisst die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis.

suchten Kreis die Sekante fQP und die Tangente fa, daher ist nach dem Sekanten-Tangentensatz:

1). . . . . $\begin{cases} fP : fa = fa : fQ \\ \text{oder} \\ \overline{fa}^2 = fP \cdot fQ \end{cases}$

d. h. fa ist zu finden als mittlere Proportionale aus fP und fQ.

Figur 37.



Konstruktion. Verlängere (Fig. 37) PQ bis zum Schnitt mit G in f. Beschreibe über PQ als Durchmesser einen Kreis, lege an denselben von f aus die Tangente ft. Mache auf der Geraden G von f aus nach beiden Seiten die Strecken fa und $fb = ft$. Errichte auf G in a und b Lote, welche das Mittellot von PQ in X und Y schneiden; beschreibe um X mit Xa, um Y mit Yb Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Kreis X berührt die Gerade G in a nach Erkl. 10. Es sei nun h die Mitte von PQ, und die Gerade fPQ schneide den gesuchten Kreis X in P_1 und Q_1, so ist h auch die Mitte von $P_1 Q_1$, weil h der Fusspunkt der von X auf $P_1 Q_1$ gefällten Senkrechten ist (siehe Erkl. 15). Nun ist nach dem Sekanten-Tangentensatz (Erkl. 43):

1). . . . . . . $\overline{ft}^2 = fP \cdot fQ$,

weil P, Q, t auf dem Hilfskreis liegen, oder, da nach Konstruktion $ft = fa$ ist:

2). . . . . . . $\overline{fa}^2 = fP \cdot fQ$;

andererseits ist aber nach dem gleichen Satze:

3). . . . . . . $\overline{fa}^2 = fP_1 \cdot fQ_1$,

weil a, P_1, Q_1 auf dem gesuchten Kreise liegen.

Die Gleichungen 2) und 3) lassen sich aber auch so schreiben:

$$fa^2 = (fh + \tfrac{1}{2} PQ) \cdot (fh - \tfrac{1}{2} PQ)$$
$$fa^2 = (fh + \tfrac{1}{2} P_1Q_1) \cdot (fh - \tfrac{1}{2} P_1Q_1),$$

(S. Erkl. 15.) Die Senkrechte vom Mittelpunkt auf eine Sehne halbiert dieselbe, und umgekehrt: Das Mittellot einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

oder nach einem bekannten Satz der Buchstabenrechnung:

4). . . . . $fa^2 = fh^2 - \frac{1}{4} PQ^2$

5). . . . . $fa^2 = fh^2 - \frac{1}{4} \overline{P_1Q_1}^2$.

Erkl. 44. Ein bekannter Satz der Buchstabenrechnung (siehe *Staudacher*, Buchstabenrechnung) lautet: Das Produkt aus Summe und Differenz zweier Grössen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Aus 4) und 5) folgt, dass $\frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} P_1Q_1$ ist, d. h. dass P_1 mit P und Q_1 mit Q zusammenfällt, oder dass der gesuchte Kreis um X durch P und Q geht.

Ganz analog ist der Beweis für den Kreis um Y.

Determination. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn die Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden G liegen, weil die Strecke PQ Sehne des gesuchten Kreises ist, jeder Punkt dieser Sehne, also auch ihr Schnittpunkt mit G muss innerhalb des Kreises liegen, also müsste G den Kreis schneiden. Andernfalls lässt die Aufgabe zwei Lösungen zu.

(S. Erkl. 25) Eine Gerade schneidet einen Kreis, wenn irgend ein Punkt in ihr vom Mittelpunkt einen kleineren Abstand hat als die Länge des Halbmessers.

Eine einzige Lösung erhält man, wenn einer der Punkte auf der Geraden selbst liegt. Dieser Punkt ist dann Berührungspunkt (siehe Aufgabe 42).

Haben die beiden Punkte gleichen Abstand von G, so wird die vorliegende Konstruktion illusorisch, weil PQ die Gerade G nicht mehr schneidet. In diesem Falle ist nach Aufgabe 45 zu verfahren.

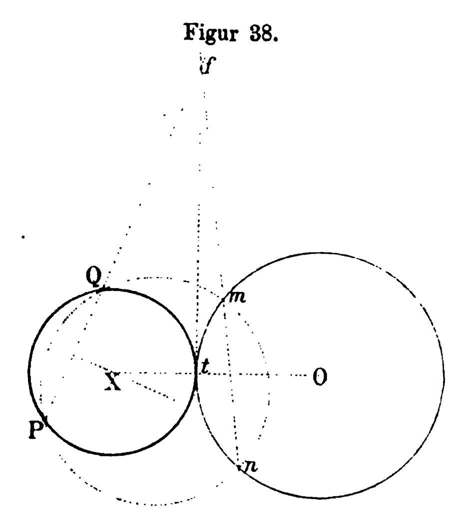
Ist PQ senkrecht zur Geraden G, so liegt Aufgabe 46 vor.

Aufgabe 83. Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: P, Q, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 38.



Analysis. Angenommen, Kreis X (Fig. 38) berühre den gegebenen Kreis in *t* und gehe durch P und Q, so ist ein geometrischer Ort für X das Mittellot auf PQ (siehe Frage 14). Wäre Punkt *t* bekannt, so wäre der Halbmesser O*t* ein zweiter geometrischer Ort für X (siehe Frage 18).

Es sei nun in *t* die gemeinschaftliche Tangente des gegebenen und des gesuchten Kreises gezogen, welche PQ in *f* schneide, dann ist:

1). . . . . . $fP \cdot fQ = \overline{ft}^2$

nach Erkl. 43. Denkt man sich von *f* in den gegebenen Kreis die beliebige Sekante *fmn* gezogen, so ist nach Erkl. 43:

2). . . . . . $fm \cdot fn = \overline{ft}^2$,

daher ist:

3). . . . . . $fP . fQ = fm . fn$.

Folglich liegen nach der Umkehrung des Sekantensatzes die Punkte P, Q, m, n auf einer Kreislinie. Daher kann man m und n, also auch f und t finden.

Erkl. 45. Die Umkehrung des Sekantensatzes lautet:

Liegen auf jedem Schenkel eines Winkels zwei Punkte so, dass die Produkte ihrer Entfernungen von der Spitze für jeden Schenkel gleich sind, so liegen die vier Punkte auf einem Kreis.

Beweis. Nach Voraussetzung ist:

$$ab . ac = ad . de$$

oder:

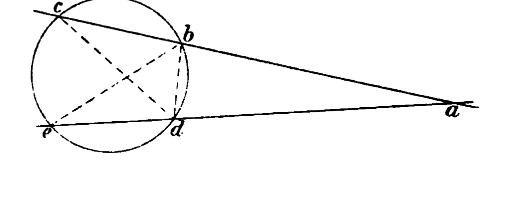
$$ab : ae = ad : ac,$$

die Seiten der Dreiecke abe und adc sind also proportioniert, und da dieselben den gleichen Winkel haben, so sind sie ähnlich. Folglich ist:

$$\sphericalangle bed = \sphericalangle dcb,$$

daher liegen e und c auf einem Kreisbogen über Sehne bd nach der Umkehrung des Satzes von den Peripheriewinkeln (siehe Erkl. 46).

Figur 39.



Erkl. 46. Die Spitzen aller Winkel von gleicher Grösse, deren Schenkel durch zwei gegebene Punkte gehen, liegen auf einem Kreis, welcher durch die beiden Punkte geht (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.).

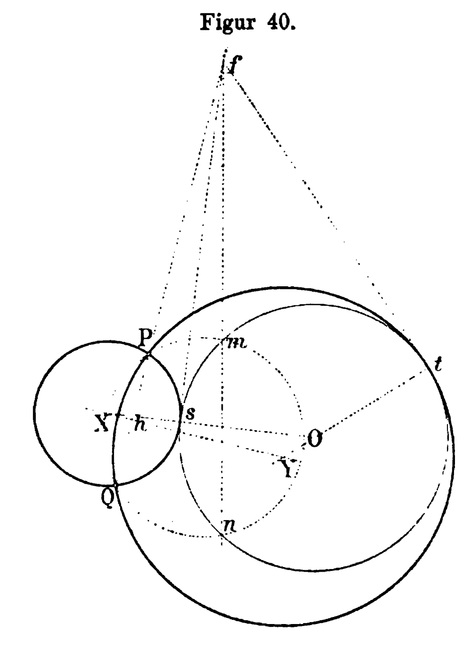
Erkl. 47. Die Umkehrung des Tangentensatzes lautet:

Liegen auf dem einen Schenkel eines Winkels ein, auf dem anderen zwei Punkte so, dass der Abstand des ersten Punkts von der Spitze mittlere Proportionale zu den Abständen der beiden anderen Punkte von der Spitze ist, so berührt der durch die drei Punkte gelegte Kreis den ersten Schenkel in dem gegebenen Punkt.

Beweis ähnlich wie bei Erkl. 45.

Konstruktion. Errichte auf PQ das Mittellot (Fig. 40). Beschreibe um einen beliebigen Punkt des Mittellots einen Hilfskreis, welcher den gegebenen Kreis O in m und n schneidet, ziehe mn, welche PQ in f schneidet; lege von f an den gegebenen Kreis die Tangenten fs und ft, ziehe Os und Ot, welche das Mittellot von PQ in X und Y schneiden; beschreibe um X mit Xs,

Figur 40.



(S. Erkl. 44.) Das Produkt (Rechteck) aus Summe und Differenz zweier Zahlen (Strecken) ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

um Y mit Yt Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Kreis X berührt den gegebenen Kreis in s nach Erkl. 4 und 22; PQ schneide den Kreis X in P_1 und Q_1, die Mitte h von PQ ist dann zugleich Mitte von P_1Q_1 nach Erkl. 15. Nun ist nach dem Sekantensatz, da P, Q, m, n auf dem Hilfskreis liegen:

1). . . . . . $fP \cdot fQ = fm \cdot fn.$

Nach dem Tangentensatz, weil m, n, s auf dem gegebenen Kreis liegen:

2). . . . . . $fm \cdot fn = \overline{fs}^2,$

daher:

3). . . . . . $fP \cdot fQ = \overline{fs}^2.$

Da aber P_1, Q_1, s auf dem Kreis X liegen, ist nach dem Tangentensatz:

4). . . . . . $fP_1 \cdot fQ_1 = \overline{fs}^2,$

daher ist:

5). . . . . . $fP \cdot fQ = fP_1 \cdot fQ_1.$

oder unter Benützung von Erkl. 44:

$$(fh + \tfrac{1}{2}PQ)(fh - \tfrac{1}{2}PQ) = (fh + \tfrac{1}{2}P_1Q_1)(fh - \tfrac{1}{2}P_1Q_1),$$

oder:

6). . . . $\overline{fh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{PQ}^2 = \overline{fh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{P_1Q_1}^2.$

Daraus folgt:

$$\tfrac{1}{2}PQ = \tfrac{1}{2}P_1Q_1,$$

d. h. die Punkte P_1, Q_1 fallen mit P, Q zusammen; der gesuchte Kreis X geht durch P und Q.

Ganz analog ist der Beweis für den Kreis Y.

Determination. Es gibt im allgemeinen zwei Lösungen, da man von f an den gegebenen Kreis zwei Tangenten legen kann. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn P und Q nicht beide ausserhalb oder beide innerhalb des gegebenen Kreises liegen, denn sonst müsste der gesuchte Kreis ebenfalls zum Teil ausserhalb, zum Teil innerhalb des gegebenen Kreises liegen, also diesen schneiden.

Die Aufgabe wird ferner unmöglich, wenn beide gegebenen Punkte auf dem Kreise liegen, da sonst der gegebene und der gesuchte Kreis drei Punkte (nämlich P, Q und den Berührungspunkt) gemeinsam hätten.

Die Aufgabe wird ausserdem unmöglich,

wenn einer der beiden Punkte auf dem Kreise, der andere auf der in diesem Punkte an den Kreis gezogenen Tangente liegt, denn zwei einander berührende Kreise können nur einen Punkt, den Berührungspunkt gemeinsam haben.

Die Aufgabe lässt nur eine Lösung zu, wenn die beiden Punkte P und Q auf einer Tangente des gegebenen Kreises liegen, weil dann eine der beiden Tangenten fs oder ft mit PQ zusammenfällt.

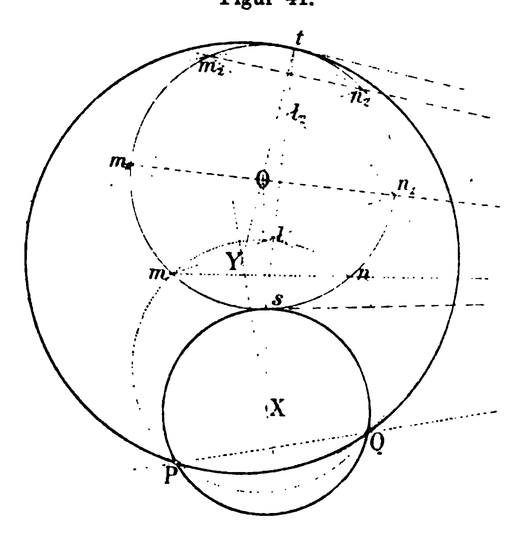
Zwei kongruente Lösungen erhält man, wenn P und Q auf einem Durchmesser des gegebenen Kreises liegen.

Ohne Proportionen lässt sich die Aufgabe lösen, wenn einer der beiden Punkte auf dem Kreise liegt (siehe Aufgabe 43), oder wenn die beiden gegebenen Punkte gleichen Abstand vom Mittelpunkt des gegebenen Kreises haben (siehe Aufgabe 47).

Anmerkung 15. Die Lösung der vorhergehenden Aufgabe wird sehr häufig dadurch erschwert, dass der Hilfspunkt f in grosse Entfernung, also über das Zeichenblatt hinausfällt. In diesem Falle muss man die Berührungspunkte s und t direkt aufsuchen.

Aufgabe 84. (Spezieller Fall von Aufgabe 83.) Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt, wenn die Verbindungsstrecke der gegebenen Punkte und die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt einander ausserhalb des Zeichenblatts schneiden.

Figur 41.



Konstruktion. Beschreibe drei beliebige Hilfskreise, welche durch P und Q gehen und den gegebenen Kreis in den Punktepaaren m, n; m_1, n_1; m_2, n_2 schneiden.

Ziehe mn_1 und m_1n, die einander in l schneiden.

Ziehe m_1n_2 und m_2n_1, die einander in l_2 schneiden.

Ziehe ll_2, welche den gegebenen Kreis in s und t schneidet; ziehe Os und Ot. welche das Mittellot von PQ in X und Y schneiden; beschreibe um X mit Xs, um Y mit Yt Kreise, so sind diese die gesuchten.

Erkl. 48. Zieht man von einem Punkt in einen Kreis mehrere Sekanten und verbindet deren Schnittpunkte kreuzweise, so geht die Verbindungsgerade der Schnittpunkte jener kreuzweisen Verbindungsstrecken durch die Berührungspunkte der von dem Punkt an den Kreis gezogenen Tangenten (siehe Erkl. 110).

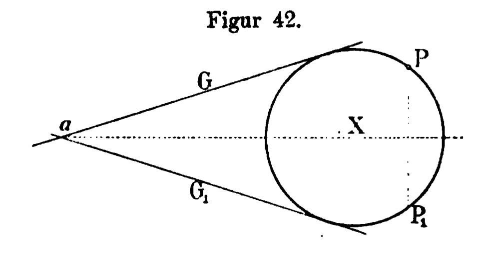
Der **Beweis** stützt sich auf einen in Erkl. 48 ausgesprochenen Satz der neueren Geometrie, welcher hier nicht bewiesen werden kann. (Siehe *Vonderlinn*, Lehrb. d. Projektionszeichnens und Frage 22, Antwort d.)

Aufgabe 85. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Geraden berührt.

Gegeben: P, G, G_1.

Gesucht: Kreis um X.

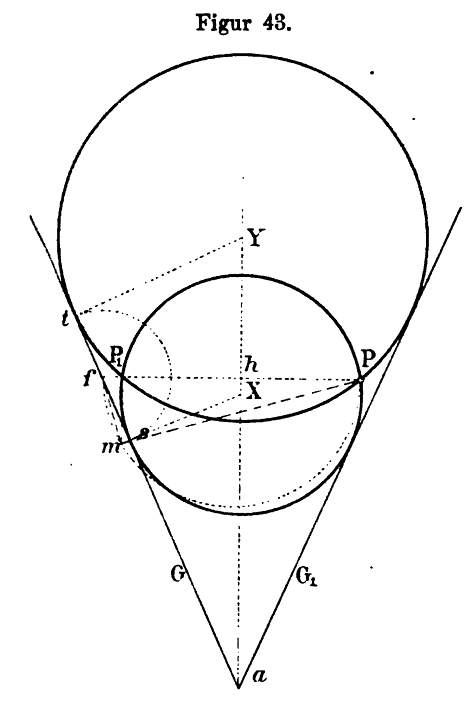
Figur 42.



Analysis. Ein geometrischer Ort für den gesuchten Mittelpunkt X (Fig. 42) ist die Halbierungsgerade desjenigen Winkels zwischen den beiden Geraden G und G_1, in welchem der gegebene Punkt P liegt (siehe Frage 15).

Nach Erkl. 15 halbiert diese Gerade als Durchmesser die zu ihr senkrechte Sehne durch P. Daher muss der gesuchte Kreis auch durch den zu P für Axe aX symmetrischen Punkt P_1 gehen und die Aufgabe ist daher auf die Aufgabe 82 zurückgeführt.

Figur 43.



Konstruktion. Halbiere den Winkel am Schnittpunkt a von G und G_1, in welchem Punkt P liegt. Fälle von P auf die Halbierungsgerade die Senkrechte und verlängere dieselbe um sich selbst nach P_1. PP_1 schneidet die von P entferntere Gerade G in f. Suche die mittlere Proportionale (siehe Erklärung 49) zu fP und fP_1 und trage dieselbe von f aus auf G beiderseits nach s und t. Errichte auf G in s und t Lote, welche die Halbierungsgerade in X und Y schneiden. Beschreibe um X mit Xs, um Y mit Yt Kreise, diese sind die gesuchten.

Erkl. 49. Die Konstruktion der mittleren Proportionale beruht entweder auf dem in Erklärung 43 angeführten Satze oder auf einem der folgenden (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.):

a). In jedem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete mittlere Proportionale zur ganzen Hypotenuse und der Projektion jener Kathete auf die Hypotenuse.

b). In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere Proportionale zu den beiden Höhenabschnitten der Hypotenuse.

Beweis. Die mittlere Proportionale wurde konstruiert durch den Halbkreis über Pf und das Lot auf Pf in P_1, welches denselben in m schneidet. Dann ist Pmf ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Erkl. 50), also nach Erklärung 49:

Erkl. 50. Der Peripheriewinkel des Halbkreises ist ein Rechter.

$$\overline{fm}^2 = fP \,.\, fP_1,$$

aber:

$$fm = fs = ft,$$

also:

$$1). \ldots\ldots \quad \overline{fs}^2 = fP \,.\, fP_1.$$

Schneidet PP_1 den gesuchten Kreis in Q und Q_1, so wäre nach dem Tangentensatz:

$$2). \ldots\ldots \quad \overline{fs}^2 = fQ \,.\, fQ_1$$

(S. Erkl. 43.) (Tangentensatz.) Das Rechteck aus einer ganzen Sekante und ihrem äusseren Abschnitt ist gleich dem Quadrate der Tangente vom äusseren Endpunkte der Sekante an den Kreis.

oder, da nach Erklärung 15 die Mitte h von PP_1 und QQ_1 zusammenfällt:

$$(fh + \tfrac{1}{2}PP_1)(fh - \tfrac{1}{2}PP_1) = (fh + \tfrac{1}{2}QQ_1)(fh - \tfrac{1}{2}QQ_1),$$

(S. Erkl. 44.) Das Produkt aus Summe und Differenz zweier Grössen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

oder:

$$\overline{fh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{PP_1}^2 = \overline{fh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{QQ_1}^2,$$

woraus folgt, dass:

$$\tfrac{1}{2}PP_1 = \tfrac{1}{2}QQ_1,$$

oder dass Kreis X durch P und P_1 geht. Da er nun nach Konstruktion die Gerade G berührt und sein Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden zwischen G und G_1 liegt, so berührt er wegen der Symmetrie der ganzen Figur (siehe Erkl. 15 und 51) auch die Gerade G_1.

Erkl. 51. Jeder Winkel ist symmetrisch für seine Halbierungsgerade als Axe.

Jede Strecke ist symmetrisch für ihr Mittellot als Axe.

Jeder Kreis ist symmetrisch für jeden Durchmesser als Axe.

Zwei Kreise sind symmetrisch für ihre gemeinsame Zentrale als Axe.

Ganz analog ist der Beweis für den Kreis um Y.

Determination. Liegt Punkt P auf keiner der gegebenen Geraden, so gibt es zwei Lösungen der Aufgabe. Keine Lösung hat dieselbe, wenn P in den Schnittpunkt a beider Geraden fällt, oder wenn die Geraden parallel sind und P ausserhalb derselben fällt.

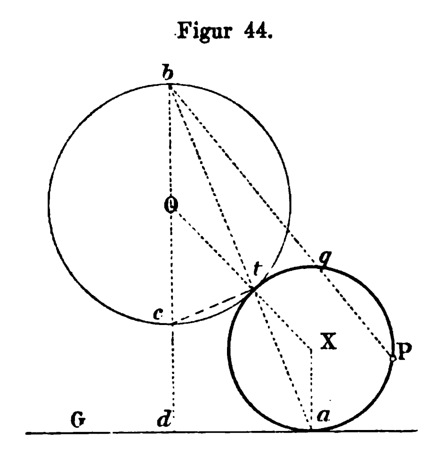
Die Fälle, wo die Geraden parallel sind, ferner, wo der gegebene Punkt auf der Halbierungsgeraden des Winkels zwischen den gegebenen Geraden liegt, oder wo der gegebene Punkt auf einer der gegebenen Geraden selbst liegt, sind schon in den Aufgaben 57, 48, 38, 37 behandelt.

Aufgabe 86. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: P, G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 44.



Analysis I (für äussere Berührung). Kreis X berühre den gegebenen Kreis O (Fig. 44) in t, die gegebene Gerade G in a. Wäre a gefunden, so wäre die Senkrechte auf G in a ein geometrischer Ort für X. Wäre t gefunden, so wäre die Verlängerung von Ot ein zweiter geometrischer Ort für X. Xat ist ein gleichschenkliges Dreieck (Erklärung 1). Verlängert man at bis zum zweiten Schnitt mit Kreis O in b und zieht Ob, so ist Obt ein gleichschenkliges Dreieck (Erkl. 1). Die Winkel bei t in den gleichschenkligen Dreiecken sind einander gleich als Scheitelwinkel, daher sind auch die Winkel bei a und b einander gleich (Erkl. 29), diese sind aber Wechselwinkel, also Ob || Xa oder Ob ⊥ G (Erkl. 33). Es liegen daher die beiden Berührungspunkte und ein Endpunkt des zur Geraden senkrechten Durchmessers in einer geraden Linie, ein Resultat, das auch schon bei Aufgabe 39 erhalten wurde. Verbindet man den andern Endpunkt c des auf G senkrechten Durchmessers von Kreis O mit t, so ist $\sphericalangle\, btc = 90^0$ (siehe Erkl. 50), daher ist auch $\sphericalangle\, cta = 90^0$; ist d der Schnittpunkt von bc mit G, so ist $\sphericalangle\, cda = 90^0$, weil O$d$ ⊥ G; daher ist das Viereck $adct$ ein Kreisviereck (siehe Erkl. 53).

Folglich ist nach dem Sekantensatz:

1). . . . . . $bc \, . \, bd = bt \, . \, ba$.

Es sei bP gezogen, welche den gesuchten Kreis in q schneidet, so ist ebenfalls nach dem Sekantensatz:

2). . . . . . $bt \, . \, ba = b\mathrm{P} \, . \, bq$

Aus 1) und 2) folgt:

3). . . . . . $bc \, . \, bd = b\mathrm{P} \, . \, bq$

oder:

4). . . . . . $b\mathrm{P} : bc = bd : bq$

Es lässt sich also bq als vierte Proportionale zu drei bekannten Grössen zeichnen, oder einfacher: aus 3) ergibt sich, dass die vier Punkte c, d, P, q auf einer Kreislinie liegen (siehe Erkl. 45). Damit ist die Aufgabe zurückgeführt entweder auf Aufgabe 82 oder auf Aufgabe 83.

Erkl. 52. Wenn ein Kreis und eine Gerade von einem zweiten Kreise berührt werden, so liegen die beiden Berührungspunkte in gerader Linie mit einem Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers des ersten Kreises, und zwar bei äusserer Berührung mit dem von der Geraden entfernteren, bei innerer Berührung mit dem näheren Endpunkt.

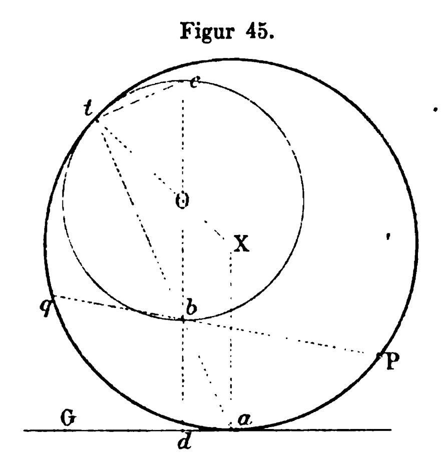
Erkl. 53. Ein geometrischer Satz lautet: In jedem Kreisviereck ist die Summe zweier Gegenwinkel = 180°, und umgekehrt:

Sind in einem Viereck zwei Gegenwinkel zusammen 180°, so ist es ein Kreisviereck.

(S. Erkl. 45.) Die Umkehrung des Sekantensatzes lautet:

Liegen auf jedem Schenkel eines Winkels zwei Punkte so, dass die Produkte ihrer Entfernungen von der Spitze für jeden Schenkel gleich sind, so liegen die vier Punkte auf einem Kreis.

Figur 45.



Analysis II (für innere Berührung). Nach Erklärung 52 liegen die beiden Berührungspunkte a und t des gesuchten Kreises X (Fig. 45) mit der gegebenen Geraden und dem gegebenen Kreis in einer Linie mit dem der Geraden näheren Endpunkt b des Durchmessers von Kreis O, welcher auf G senkrecht steht. Denn die gleichschenkligen Dreiecke Xat und Obt haben den Winkel bei t gemeinsam, daher sind die Winkel bei a und b einander gleich (Erkl. 29), und da diese Winkel korrespondierende sind, so ist $\mathrm{O}b \parallel \mathrm{X}a$ oder $\perp$ G. Ist wieder, wie vorhin, q der andere Schnittpunkt von bP mit dem gesuchten Kreis, so ist nach einem planimetrischen Satz (siehe Erkl. 54):

1). . . . . . $b\mathrm{P} \, . \, bq = bc \, . \, bd$,

aber $\sphericalangle\, ctb = 90^0$ (Erkl. 50) $= \sphericalangle\, bda$, daher ist Viereck $actd$ ein Kreisviereck, folglich nach dem Sehnensatz:

2). . . . . . $bc \, . \, bd = ba \, . \, bt$,

folglich auch:

3). . . . . . $b\mathrm{P} \, . \, bq = bc \, . \, bd$,

oder:

4). . . . . . $b\mathrm{P} : bc = bd : bq$.

Es lässt sich daher bq als vierte Proportionale zu drei bekannten Strecken konstruieren, oder einfacher: aus 3) folgt, dass die vier Punkte c, d, P, q auf einer Kreislinie liegen. Dadurch kennt man q und hat die Aufgabe auf Nro. 82 oder 83 zurückgeführt.

Erkl. 54. Ein planimetrischer Satz (Sehnensatz) lautet:

Wenn in einem Punkte innerhalb eines Kreises mehrere Sehnen einander schneiden, so ist das Produkt der beiden Abschnitte jeder Sehne, vom Schnittpunkt bis an den Kreis gerechnet, konstant.

Dieses Produkt heisst Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis. Es ist gleich dem Quadrat der halben kürzesten Sehne, die durch den gegebenen Punkt geht.

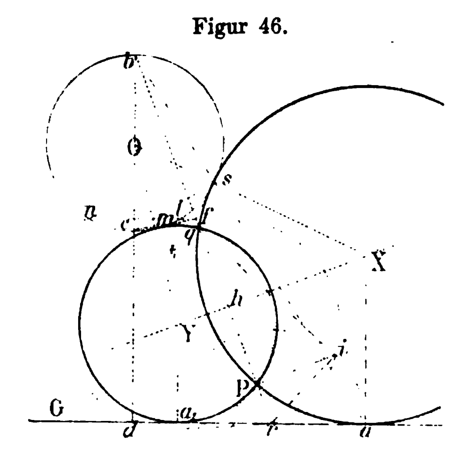
Erkl. 55. Die Umkehrung des Sehnensatzes lautet:

Ist in einem Viereck das Produkt der Abschnitte einer Diagonale gleich dem Produkt der Abschnitte der anderen Diagonale, so ist das Viereck ein Kreisviereck (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.).

Konstruktion. Ziehe (Fig. 46 und 47) den auf G senkrechten Durchmesser bc von Kreis O, welcher G in d schneidet. Lege durch c, d, P einen Hilfskreis, welcher bP in q und den gegebenen Kreis zum zweitenmal in m schneidet. Ziehe cm, welche Pq in f trifft; lege von f an den gegebenen Kreis die Tangenten fs und ft. Ziehe Os und Ot, welche das Mittellot von Pq in X und Y schneiden. Beschreibe um X mit Xs, und Y mit Yt Kreise, so sind diese die gesuchten.

Wenn der Hilfskreis durch cdP mit dem gegebenen Kreis einen ungünstigen Schnitt macht, so lege (Fig. 46) durch P und q einen beliebigen Hilfskreis, der den gegebenen in l und n schneidet, so trifft ln die Pq in f.

Figur 46.



Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis
der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

855. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem
nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 847. — Seite 49—64.
Mit 19 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 847. — Seite 49—64. Mit 19 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in Fragen mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der **eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben)** des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

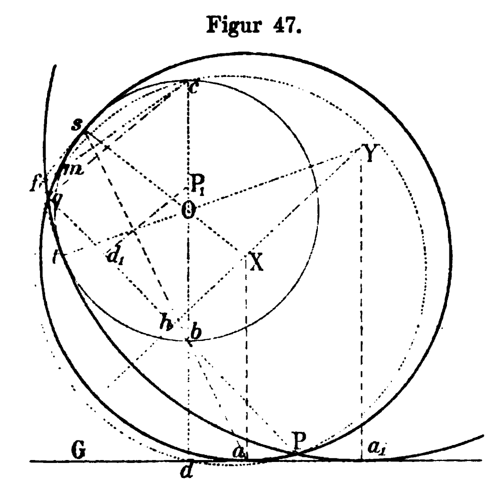
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in allen **Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer, Frankfurt a. M.** Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 47.



(S. Erkl. 49.) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete mittlere Proportionale zur ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Höhenabschnitt der Hypotenuse.

Wenn Punkt f dem gegebenen Kreis sehr nahe liegt, so dass die Berührungspunkte s und t nicht genau zu finden sind, oder wenn Punkt f ausserhalb des Zeichenblatts fällt, so verlängere (Fig. 46) qP bis zum Schnitt mit G in r und suche mittels des Kathetensatzes die mittlere Proportionale zu rP und rq (Halbkreis über rq und Senkrechte auf rq in P, welche den Halbkreis in i trifft, ri ist die mittlere Proportionale, siehe Erkl. 49 und 50) und trage dieselbe auf G von r aus beiderseits nach a und a_1, so sind diese Punkte die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit G.

Liefert der Hilfskreis durch c, d, P einen ungünstigen Schnitt mit bP, so dass q nicht scharf bestimmt wird, so mache (Fig. 47) auf bc die Strecke $bP_1 = bP$ und auf bP (bei äusserer Berührung gegen P hin, bei innerer Berührung entgegengesetzt) $bd_1 = bd$, ziehe P_1d_1 und die Parallele dazu durch c, welches bP in q trifft, denn dann ist bq vierte Proportionale zu bP_1, bc, bd_1 (siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben II).

(S. Erkl. 15.) Das Lot vom Mittelpunkt auf eine Sehne halbiert letztere.

Beweis. Der gesuchte Kreis X berührt den gegebenen Kreis in s nach Konstruktion. Er schneide Pq in P_1 und q_1; die Mitte h von P_1q_1 fällt mit der Mitte von Pq zusammen, da X auf dem Mittellot von Pq liegt und die Sehne P_1q_1 senkrecht auf diesem Mittellot steht.

Nun ist, nach dem Sekantensatz, angewendet auf den Hilfskreis durch c, d, P, q:

1). . . . . . $fP \cdot fq = fc \cdot fm.$

Nach dem Tangentensatz, angewendet auf den gegebenen Kreis:

2). . . . . . $fc \cdot fm = \overline{fs}^2.$

Nach dem Tangentensatz, angewendet auf den Kreis X:

3). . . . . . $\overline{fs}^2 = fP_1 \cdot fq_1,$

daher ist:

4). . . . . . $fP \cdot fq = fP_1 \cdot fq_1$

oder:

$$(fh + \tfrac{1}{2}Pq)(fh - \tfrac{1}{2}Pq) = (fh + \tfrac{1}{2}P_1q_1)(fh - \tfrac{1}{2}P_1q_1)$$

oder nach Erklärung 44:

$$\overline{fh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{Pq}^2 = \overline{fh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{P_1q_1}^2,$$

d. h. $\tfrac{1}{2}Pq = \tfrac{1}{2}P_1q_1$

oder der Kreis X geht durch P und q.

Ziehe bs, welche den gesuchten Kreis in

(S. Erkl. 43 und 54.) Erkl. 43 und 54 können zusammen so ausgesprochen werden:

Gehen mehrere Geraden, welche einen Kreis schneiden, durch einen Punkt, so ist das Produkt der beiden Abschnitte vom Punkt bis zu jedem Schnittpunkt mit dem Kreise für jede Gerade konstant, und zwar gleich dem Quadrate der Tangente vom Punkte aus, wenn dieser ausserhalb liegt, oder gleich dem Quadrat der halben durch ihn zu ziehenden kürzesten Sehne, wenn er innerhalb des Kreises liegt.

a' schneidet, während das Lot von X auf G dieselbe in a trifft, so ist nach dem Sekantensatz in Figur 46, nach dem Sehnensatz in Figur 47, angewendet auf den Hilfskreis:

5). . . . . . $bc.bd = bq.b\mathrm{P}$.

Nach dem gleichen Satz, angewendet auf den Kreis X:

6). . . . . . $bq.b\mathrm{P} = bs.ba'$,

also wegen 5) und 6):

7). . . . . . $bc.bd = bs.ba'$,

aber Winkel $bsc = 90^0$ (siehe Erkl. 50), also:

$$\sphericalangle csa = \sphericalangle cda,$$

daher Viereck $cdas$ ein Kreisviereck (siehe Erkl. 54), folglich nach dem Sekanten- bezw. Sehnensatz:

8). . . . . . $bc.bd = bs.ba$.

Durch Vergleichung von 7) mit 8) folgt, dass $ba = ba'$, d. h. dass der gesuchte Kreis durch a geht. Da dieser Punkt Fusspunkt des Lots vom Mittelpunkt auf die Gerade G ist, so berührt der Kreis die Gerade in a (Erkl. 10).

Analog ist der Beweis für den Kreis Y.

Die Beweise für die Modifikationen der Konstruktion sind teilweise schon angedeutet, teilweise folgen sie aus Aufgabe 82 und 83.

Determination. Bei der in Figur 46 und 47 gewählten gegenseitigen Lage von Punkt, Gerade und Kreis gibt es vier Berührungskreise, zwei, welche den gegebenen Kreis von aussen, zwei, welche ihn von innen berühren.

Nun kann aber ein Punkt gegen einen Kreis drei verschiedene Lagen einnehmen, aussen, auf oder im Kreis liegen. Bei jeder dieser Lagen kann die Gerade den Kreis entweder nicht schneiden oder berühren oder schneiden. Es sind daher neun Hauptfälle zu unterscheiden; bei jedem derselben ist noch zu berücksichtigen, ob der gegebene Punkt auf oder ausserhalb der Geraden liegt, und im letzteren Falle, auf welcher Seite derselben.

I. Punkt P liegt ausserhalb des Kreises O.

1). Die Gerade schneidet den Kreis nicht.

a). Sie geht zwischen Punkt und Kreis hindurch: Keine Lösung, denn jeder Kreis, der die Gerade

berührt, muss ganz auf einer Seite derselben liegen;

b). sie geht durch den Punkt: zwei Lösungen, siehe Aufgabe 39;

c). Punkt und Kreis liegen auf derselben Seite der Geraden: vier Lösungen, siehe Fig. 46 u. 47.

2). Die Gerade berührt den Kreis.

a). Sie trennt den Punkt vom Kreis: keine Lösung;

b). der Punkt liegt auf ihr: ein äusserer Berührungskreis (siehe Determination von Aufgabe 39);

c). Punkt und Kreis liegen auf derselben Seite der Geraden: zwei äussere und ein umschliesend berührender Kreis, letzterer geht durch den Berührungspunkt der Geraden mit dem Kreis. Der zweite Kreis von Figur 47 artet in die Gerade selbst aus.

3). Die Gerade schneidet den Kreis.

a). Die Gerade geht nicht durch den Punkt: zwei äussere Berührungskreise auf derselben Geraden;

b). die Gerade geht durch den Punkt: zwei äussere Berührungskreise auf verschiedenen Seiten der Geraden (Aufg. 39).

II. Der Punkt liegt auf dem Kreis.

Diese Fälle sind in Aufgabe 41 behandelt.

III. Der Punkt liegt im Kreis.

1). Die Gerade schneidet den Kreis nicht: keine Lösung.

2). Die Gerade berührt den Kreis: eine Lösung (Aufg. 43).

3). Die Gerade schneidet den Kreis: zwei innere Berührungskreise auf derselben Seite der Geraden.

Geht in diesem Falle die Gerade auch noch durch den gegebenen Punkt, so liegen die beiden Berührungskreise auf verschiedenen Seiten der Geraden (Aufg. 39).

IV. Liegt in den Fällen I, 1) und I, 3) der Punkt auf einer zur Geraden parallelen Tangente des gegebenen Kreises, so artet einer der möglichen Berührungskreise in eine Gerade, nämlich eben jene Tangente aus, so dass die Zahl der möglichen Lösungen um eine vermindert wird.

V. Liegt der gegebene Punkt auf dem zur gegebenen Geraden senkrech-

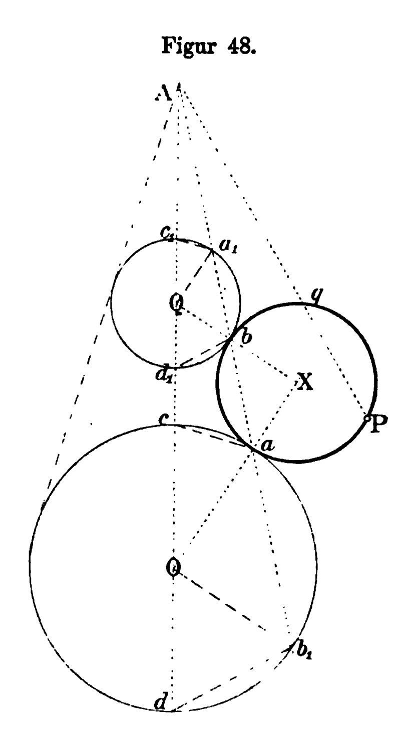
ten Durchmesser des gegebenen Kreises, so liegen die möglichen Berührungskreise symmetrisch zu diesem Durchmesser. Die oben angegebene Konstruktion wird aber hinfällig, weil sich durch die in gerader Linie liegenden Punkte d, P, c kein Kreis legen, also der Punkt q nicht auf die angegebene Art bestimmen lässt. Man muss in diesem Falle nach Gleichung 4 der Analysis die Strecke bq als vierte Proportionale zu cP, bc, bd suchen (siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben) und von b aus auf dem Durchmesser abtragen. Die weitere Konstruktion erfolgt dann wie oben.

Aufgabe 87. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt.

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 48.

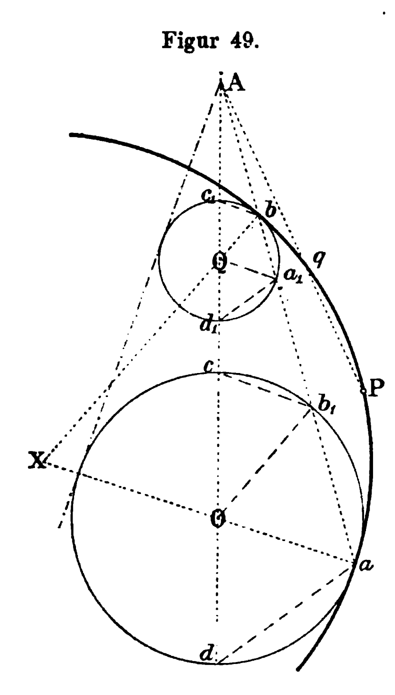


Analysis. I. Fall. Der gesuchte Kreis berühre die beiden gegebenen gleichartig, nämlich entweder beide von aussen (Fig. 48) oder beide umschliessend (Fig. 49) oder beide von innen (Fig. 50) und zwar Kreis O in a, Kreis Q in b.

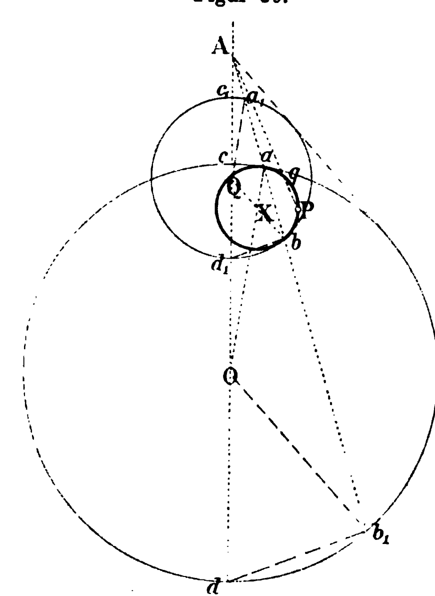
Man ziehe die Zentralen OX und QX und die Berührungssehne ab. Diese schneide verlängert zum zweitenmale den grösseren Kreis O in b_1, den Kreis Q in a_1, die verlängerte Zentrale OQ in A, ziehe Ob_1 und Qa_1, so sind die drei Dreiecke Xab, Oab_1, Qba_1 gleichschenklig und ihre Winkel bei a und b einander gleich (siehe Erkl. 29), daher ist Qa_1 || Oa und Ob_1 || Qb (siehe Erklärung 33); also sind die Dreiecke AOa und AQa_1 ähnlich, ebenso die Dreiecke AOb_1 und AQb. Folglich verhalten sich OA und QA wie die Halbmesser Oa und Qa_1 der beiden Kreise; Punkt A teilt somit die Zentrale aussen auf der Seite des kleineren Kreises im Verhältnis der Halbmesser und ist daher ein fester Punkt der Zentrale. Man nennt diesen Punkt den äusseren Aehnlichkeitspunkt beider Kreise. Man erhält ihn, wenn man die Endpunkte gleich gerichteter Halbmesser in beiden Kreisen verbindet, oder auch als Schnittpunkt einer gemeinsamen Tangente, falls eine solche möglich ist, mit der Zentrale, da ja die zugehörigen Halbmesser dieser Tangente ebenfalls parallel sind.

Es seien nun c und c_1 die dem äusseren Aehnlichkeitspunkte zugewendeten, d und d_1 die von ihm entfernteren Punkte der Kreise

Figur 49.



Figur 50.



Erkl. 56. Wenn die Seiten zweier Dreiecke einzeln parallel sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Erkl. 57. Die Verbindungsgerade irgend zweier gleichgerichteter Halbmesser in zwei Kreisen schneidet die gemeinschaftliche Zentrale in einem festen Punkte, dem äusseren Aehn-

O und Q auf der gemeinsamen Zentrale, und es seien ad und a_1d_1, cb_1 und c_1b gezogen, so ist nach Erklärung 56:

$$\triangle Oad \cong \triangle Qa_1d_1$$

und

$$\triangle Ocb_1 \cong \triangle Qc_1b_1,$$

daher:

1). . . . $Aa:Aa_1 = Ac:Ac_1 = r:r_1 = Ad:Ad_1$

und

2). . . . $Ab_1:Ab = Ad:Ad_1 = r:r_1 = Ac:Ac_1$.

Wegen des Sekantensatzes ist aber:

3). . . . $Aa \,.\, Ab_1 = Ac \,.\, Ad$

und

4). . . . $Aa_1 \,.\, Ab = Ac_1 \,.\, Ad_1$

Durch Division von 1) in 3) und von 2) in 4) erhält man:

5). . . . $Aa_1 \,.\, Ab_1 = Ac \,.\, Ad_1 = Ad \,.\, Ac_1$

6). . . . $Aa \,.\, Ab = Ac \,.\, Ad_1 = Ad \,.\, Ac_1$.

Nach der Umkehrung des Sekantensatzes folgt also, dass die Vierecke abd_1c, abc_1d, $a_1c_1db_1$, $a_1d_1cb_1$ Kreisvierecke sind. Nach dem Sekantensatz ist aber, wenn AP gezogen wird, welche den gesuchten Kreis zum zweitenmale in q schneidet:

7). . . . $Aa \,.\, Ab = AP \,.\, Aq$.

Daraus folgt in Verbindung mit 5) und 6):

8). . . . $Ac \,.\, Ad_1 = Ac_1 \,.\, Ad = AP \,.\, Aq$.

Nach der Umkehrung des Sekantensatzes liegen also die Punkte P, q, d_1, c; ebenso P, q, c_1, d je auf einem Kreise, oder Aq lässt sich als vierte Proportionale zu AP, Ac, Ad_1 oder zu AP, Ac_1, Ad konstruieren. Damit ist der Punkt q bekannt, also ist die Aufgabe auf Nr. 83 zurückgeführt.

lichkeitspunkt, welcher die Zentrale aussen im Verhältnis der Halbmesser teilt. Irgend eine durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt gehende Gerade heisst äusserer Aehnlichkeitsstrahl.

Die Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahls mit gleich gerichteten Halbmessern heissen homologe Punkte. Die Verbindungsgeraden oder Verbindungsstrecken homologer Punkte heissen homologe Geraden oder homologe Strecken.

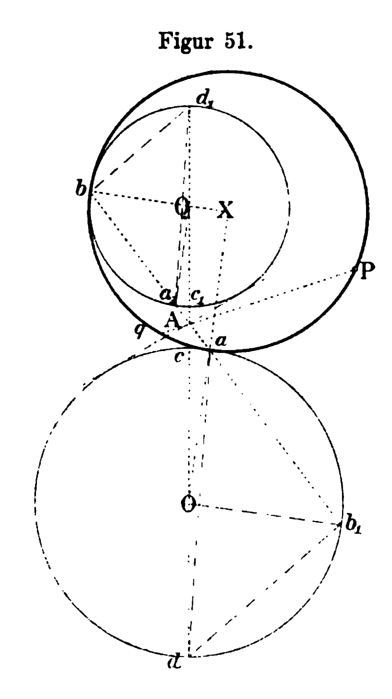
Homologe Strecken verhalten sich wie die Halbmesser.

Die Abstände homologer Punkte vom Aehnlichkeitspunkt verhalten sich wie die Halbmesser.

Erkl. 58. Wenn ein Kreis zwei andere gleichartig berührt, so ist die Berührungssehne äusserer Aehnlichkeitsstrahl der gegebenen Kreise.

Erkl. 59. Das Produkt der Abschnitte eines äusseren Aehnlichkeitsstrahls vom Aehnlichkeitspunkt bis zu zwei nicht homologen Schnittpunkten mit den Kreisen ist konstant und zwar gleich dem Produkt der Entfernungen zweier nicht homologer Kreispunkte auf der Zentrale vom Aehnlichkeitspunkt.

Figur 51.

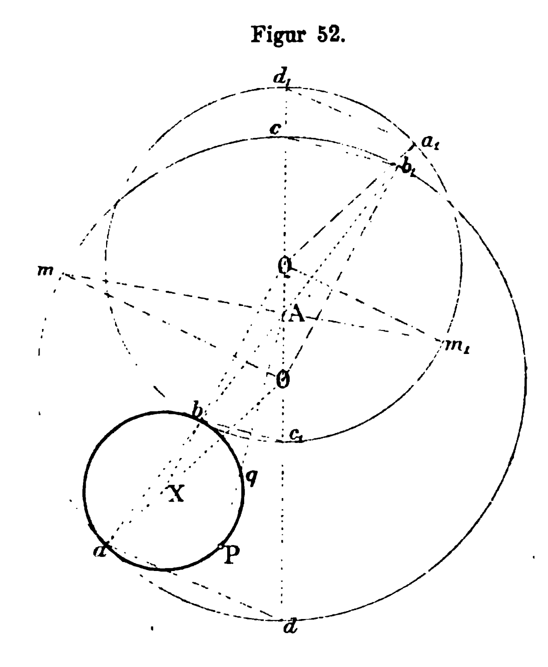


II. Fall. Der gesuchte Kreis berühre die beiden gegebenen ungleichartig, nämlich (Fig. 51) Kreis O von aussen in a, Kreis Q umschliessend in b, oder (Fig. 52) Kreis O von innen in a, Kreis Q von aussen in b.

Wie bei der Analysis von Fall I verlängere man die Berührungssehne bis zum Schnitt mit Kreis O in b_1, mit Kreis Q in a_1, mit der Zentrale OQ in A, so sind die drei gleichschenkligen Dreiecke Xab, Oab_1, Qba_1 ähnlich, da sie einen Winkel gemeinsam haben und auf derselben Grundlinie stehen. Daher sind $Oa \parallel Qa_1$ und $Qb \parallel Ob_1$; die Dreiecke AOa und AQa_1 einerseits und AOb_1 und AQb andererseits sind daher einander ähnlich, somit verhalten sich die Strecken AO und AQ wie die Halbmesser; der Punkt A teilt die Zentrale innen in diesem Verhältnis und ist somit ein fester Punkt der Zentrale, unabhängig von der Lage des Berührungskreises. Man nennt ihn den inneren Aehnlichkeitspunkt beider Kreise und erhält ihn, indem man (siehe Figur 52) zwei entgegengesetzt gerichtete Halbmesser, Om und Qm_1, zieht und ihre Endpunkte verbindet, oder indem man eine innere gemeinschaftliche Tangente an beide Kreise zieht, wenn dies (siehe Fig. 51) möglich ist.

Es seien nun c und c_1 die dem inneren Aehnlichkeitspunkt nächsten, d und d_1 die

Figur 52.



Erkl. 60. Die Verbindungsgerade der Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Halbmesser zweier Kreise geht durch einen festen Punkt der Zentrale, den inneren Aehnlichkeitspunkt, welcher den Abstand beider Mittelpunkte im Verhältnis der Halbmesser teilt. Jede durch den inneren Aehnlichkeitspunkt gehende Gerade heisst innerer Aehnlichkeitsstrahl. Die Schnittpunkte eines inneren Aehnlichkeitsstrahls mit entgegengesetzt gerichteten Halbmessern heissen homologe Punkte des inneren Aehnlichkeitspunkts. Die Verbindungsgeraden und Verbindungsstrecken homologer Punkte heissen homologe Geraden und homologe Strecken.

Homologe Strecken verhalten sich wie die Halbmesser.

Die Abstände homologer Punkte vom Aehnlichkeitspunkt verhalten sich wie die Halbmesser.

Erkl. 61. Wenn ein Kreis zwei andere Kreise ungleichartig berührt, so ist die Verbindungssehne innerer Aehnlichkeitsstrahl der beiden letzten Kreise.

Erkl. 62. Das Produkt der Abschnitte eines inneren Aehnlichkeitsstrahls vom inneren Aehnlichkeitspunkte an bis zu zwei nicht homologen Schnittpunkten ist für jeden Aehnlichkeitsstrahl konstant und zwar gleich dem Produkt der Abschnitte auf der Zentrale bis zu zwei nicht homologen Kreispunkten.

von ihm entferntesten Punkte der Kreise O und Q, so sind die Dreiecke:

$$\mathrm{A}ad \cong \mathrm{A}a_1 d_1$$

$$\mathrm{A}b_1 c \cong \mathrm{A}bc_1,$$

denn die Dreiecke Oad und Q$a_1 d_1$ einerseits, Ob_1c und Qbc_1 anderseits sind ähnlich nach Erkl. 56, also $ad \parallel a_1d_1$ und $b_1c \parallel bc$.

Es ist somit:

1). . . . $\mathrm{A}a : \mathrm{A}a_1 = r : r_1 = \mathrm{A}c : \mathrm{A}c_1 = \mathrm{A}d : \mathrm{A}d_1$

2). . . . $\mathrm{A}b_1 : \mathrm{A}c = r : r_1 = \mathrm{A}c : \mathrm{A}c_1 = \mathrm{A}d : \mathrm{A}d_1$.

Wegen des Sehnen- und des Sekantensatzes ist aber:

3). . . . $\mathrm{A}a \,.\, \mathrm{A}b_1 = \mathrm{A}c \,.\, \mathrm{A}d$

4). . . . $\mathrm{A}a_1 \,.\, \mathrm{A}b = \mathrm{A}c_1 \,.\, \mathrm{A}d_1$.

Durch Division von 1) in 3) und von 2) in 3) erhält man:

5). . . . $\mathrm{A}a_1 \,.\, \mathrm{A}b_1 = \mathrm{A}c \,.\, \mathrm{A}d_1 = \mathrm{A}c_1 \,.\, \mathrm{A}d$

6). . . . $\mathrm{A}a \,.\, \mathrm{A}b = \mathrm{A}c \,.\, \mathrm{A}d_1 = \mathrm{A}c_1 \,.\, \mathrm{A}d$.

Daraus folgt mit Rücksicht auf die Umkehrung des Sekanten- und des Tangentensatzes, dass die Vierecke $abcd_1$, abc_1d, $a_1b_1cd_1$, $a_1b_1c_1d$ Kreisvierecke sind.

Nun ist aber wegen des Sekanten- bezw. Sehnensatzes:

7) . . . $\mathrm{A}a \,.\, \mathrm{A}b = \mathrm{AP} \,.\, \mathrm{A}q$,

wo q der zweite Schnittpunkt von AP mit dem gesuchten Kreis ist; daher ist:

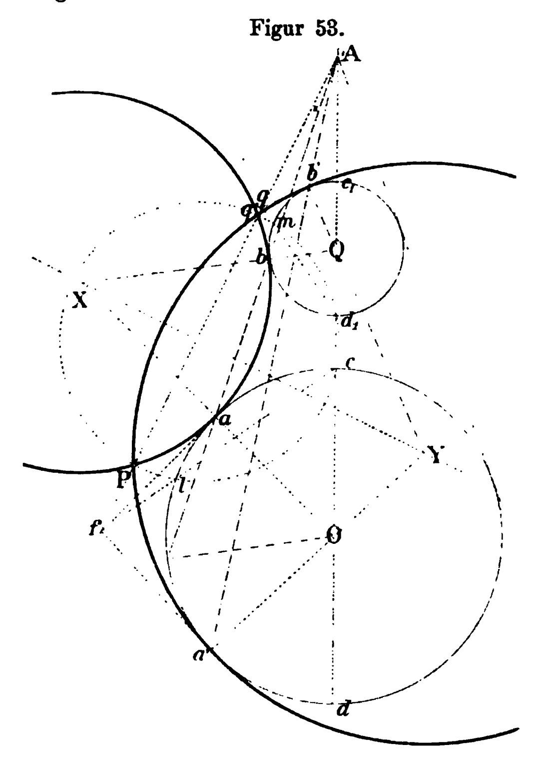
8). . . . $\mathrm{AP} \,.\, \mathrm{A}q = \mathrm{A}c \,.\, \mathrm{A}d_1 = \mathrm{A}c_1 \,.\, \mathrm{A}d$.

Es lässt sich also der Punkt q finden, da Aq vierte Proportionale zu drei bekannten Strecken ist, oder q liegt auf einem durch P, c, d_1 oder durch P, c_1, d gehenden Kreise. Damit ist die Aufgabe auf Nro. 83 zurückgeführt.

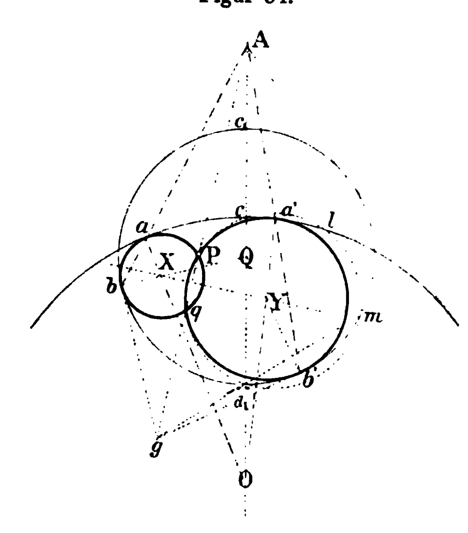
Konstruktion. Ziehe*) die gemeinschaftliche Zentrale OQ, bestimme auf ihr entweder durch eine gemeinschaftliche äussere (innere) Tangente oder (Fig. 56) durch Verbindung der Endpunkte u und u_1 zweier gleich (entgegengesetzt) gerichteter Halbmesser den äusseren (inneren) Aehnlichkeitspunkt A. Verbinde denselben mit P.

*) Die Figuren 53 und 54 beziehen sich auf die Analysis I, die Figuren 55 und 56 auf Analysis II; die zu den beiden letzten Figuren gehörigen Aenderungen des Textes sind eingeklammert.

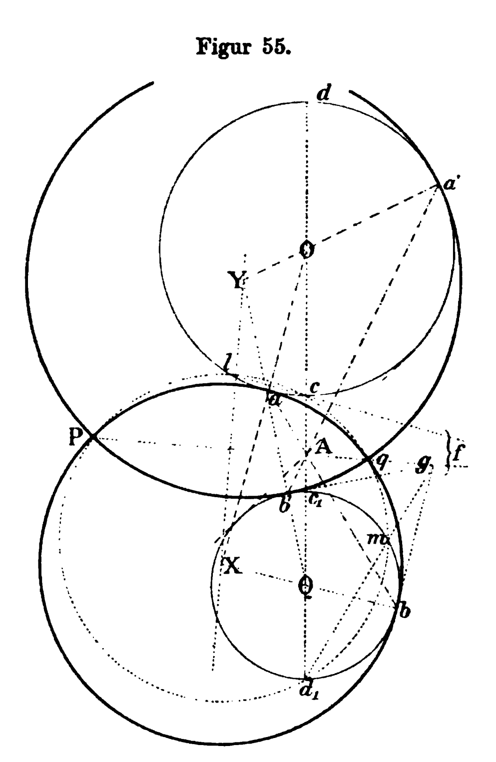
Figur 53.



Figur 54.



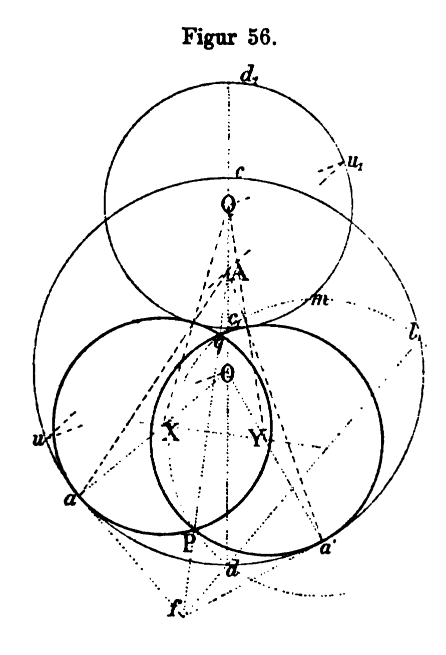
Figur 55.



Beschreibe durch zwei nicht homologe Kreispunkte der Zentrale, c und d_1 in Figur 53, 54, 55, c_1 und d in Fig. 56, sowie durch P einen Hilfskreis, welcher AP in q, Kreis O in l, Kreis Q in m schneidet. Ziehe cl (in Fig. 56 dl), welche AP in f trifft. Ziehe von f an Kreis O die Tangenten fa und fa'. Wenn der Schnittpunkt l nicht scharf genug ist, wie z. B. in Fig. 54 und 55, so ziehe d_1m, welche AP in g trifft und lege von g an Kreis Q die Tangenten gb und gb' (siehe Fig. 53, 54, 55).

Ziehe Oa und Oa' bezw. Qb und Qb', welche das Mittellot von Pq in X bezw. Y schneiden. Wenn q nicht scharf bestimmt ist, so ziehe noch Aa und Aa', welche Kreis Q

Figur 56.



Erkl. 63. Die Umkehrung von Erkl. 58 und 61 lautet:

Die Halbmesser nach zwei nicht homologen Schnittpunkten eines Aehnlichkeitsstrahls mit beiden Kreisen schneiden einander im Mittelpunkt eines dritten Kreises, welcher die beiden ersten in jenen Punkten berührt.

in b und b' schneiden. Ziehe Qb und Qb', welche Oa und Oa' in X und Y treffen. Beschreibe um X und Y Kreise mit Xa und Ya', so entsprechen diese der Aufgabe. (Wenn Punkt g benützt wurde, so sind Qb und Qb', ferner Ab und Ab' zu ziehen, welche Kreis O in a und a' schneiden, so werden Qb und Qb' von Oa und Oa' in X und Y geschnitten.

Beweis. Kreis X (Figur 53) berührt Kreis O in a nach Konstruktion (siehe Erkl. 4).

Nach Konstruktion liegen a, b, A in gerader Linie, und A ist Aehnlichkeitspunkt, folglich ist, wenn b_1 der zweite Schnittpunkt von ab mit Kreis O ist:

$$Ob_1 \parallel Qb,$$

daher:

$$\sphericalangle Ob_1a = \sphericalangle abX$$

als Wechselwinkel bei durchschnittenen Parallelen;

$$\sphericalangle Ob_1a = \sphericalangle Oab_1 \quad \text{(Erkl. 29)},$$

$$\sphericalangle Oab_1 = \sphericalangle Xab \quad \text{(Scheitelwinkel)},$$

daher:

$$\sphericalangle abX = \sphericalangle Xab,$$

folglich:

$$Xa = Xb \quad \text{(Erkl. 32)}.$$

Folglich berührt der Kreis X den Kreis O in a, den Kreis Q in b (Erkl. 4).

Nun ist aber nach dem Sekantensatz, angewendet auf den Hilfskreis:

1). . . . . . . $fP.fq = fc.fl.$

Nach dem Tangentensatz, angewendet auf Kreis O, ist:

2). . . . . . . $fc.fl = \overline{fa}^2,$

folglich ist:

3). . . . . . . $fP.fq = \overline{fa}^2.$

(S. Erkl. 45 und 47.) Erkl. 45 und 47 lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Liegen auf jeder von zwei sich schneidenden Geraden zwei Punkte so, dass das Produkt aus den Abschnitten vom Schnittpunkt bis zu ihnen für jede Gerade gleich ist, so geht ein Kreis durch die vier Punkte. Fallen auf einer der Geraden die beiden Punkte in einen zusammen, so berührt der Kreis die betreffende Gerade in diesem doppelten Punkt.

Ein durch P, q, a gelegter Kreis muss daher fa in a berühren (siehe Erkl. 47).

Ferner ist nach dem Sekantensatz, angewendet auf den Hilfskreis:

4). . . . . . . $AP \cdot Aq = Ac \cdot Ad_1$

und nach Erklärung 59:

5). . . . . . . $Ac \cdot Ad_1 = Aa \cdot Ab$,

daher ist:

6). . . . . . . $AP \cdot Aq = Aa \cdot Ab$.

Folglich geht nach Erklärung 45 der durch P, q, a gelegte Kreis, welcher Kreis O in a berührt, auch durch b.

Da es aber (siehe Aufgabe 43) nur einen einzigen Kreis gibt, welcher Kreis O in a berührt und durch Punkt b geht, so fällt der letztere Kreis mit demjenigen zusammen, welcher Kreis O in a und Kreis Q in b berührt.

Der Beweis für Kreis Y in Figur 53, sowie für die Berührungskreise der anderen Figuren ist ganz analog.

Anmerkung 16. Eine Genauigkeitsprobe ist, dass das Mittellot von Pq oder, was dasselbe ist, das Lot vom Mittelpunkt des Hilfskreises auf AP, durch X und Y gehen muss.

Wenn Punkt f oder g zu entfernt liegt, so ist nach Aufgabe 84 zu verfahren.

Anmerkung 17. Wenn Punkt P auf der gemeinsamen Zentrale OQ liegt, so lässt sich der Hilfskreis nicht konstruieren, da sich durch drei in gerader Linie liegende Punkte kein Kreis legen lässt. Man muss in diesem Falle aus der Gleichung:

$$AP \cdot Aq = Ac \cdot Ad_1$$

oder der Proportion:

$$AP : Ac = Ad_1 : Aq$$

die Grösse von Aq bestimmen (siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben). Die Richtung nach welcher Aq von A aus abzutragen ist, ergibt sich daraus, dass q immer im gleichen Raume wie P liegen muss.

Liegt P auf derselben Seite von A, wie die Strecke cd_1, so muss auch q auf derselben Seite liegen. Liegt P auf der anderen Seite von A als die Strecke cd_1, so liegt q auf der Seite von P.

Liegt A zwischen c und d_1, so liegt p auf der anderen Seite von A als P.

Determination. Die höchste Zahl der möglichen Berührungskreise ist **vier**, denn jeder Aehnlichkeitspunkt kann zwei Lösungen liefern.

Je nach der Lage von Kreis O und Kreis Q gegen einander und gegen Punkt P wechselt die Zahl der Berührungskreise.

I. Beide Kreise liegen auseinander.

1). Punkt P ausserhalb beider Kreise: zwei gleichartig (von aussen und umschliessend) und zwei ungleichartig (den einen Kreis aus-, den anderen

umschliessend) berührende Lösungen, zusammen also vier.

2). Punkt P auf einem der beiden Kreise: zwei Lösungen (siehe Aufgabe 40).

3). Punkt P in einem der beiden Kreise: Keine Lösung.

II. Die Kreise berühren einander von aussen.

1). Punkt P ausserhalb beider Kreise: drei Berührungskreise, ein äusserer, ein umschliessender und ein durch den gemeinsamen Punkt gehender, welcher den einen beider Kreise umschliesst.

2). Punkt P auf einem der beiden Kreise: Eine Lösung (siehe Aufgabe 40).

3). Punkt P innerhalb eines der beiden Kreise: Ein Berührungskreis, der durch den gemeinsamen Berührungspunkt geht.

4). Punkt P fällt in den gemeinsamen Berührungspunkt: Unzählig viele Berührungskreise.

III. Beide Kreise schneiden einander.

1). Punkt P ausserhalb beider Kreise: zwei Kreise, ein von aussen, und ein umschliessend berührender.

2). Punkt P auf einem der Kreise: zwei Lösungen (siehe Aufgabe 40).

3). Punkt P innerhalb des einen, aber ausserhalb des anderen Kreises: zwei Kreise, welche den einen von innen, den anderen von aussen berühren.

4). Punkt P innerhalb beider Kreise: zwei gleichartig, von innen, berührende Kreise.

IV. Beide Kreise berühren einander von innen.

1). Punkt P ausserhalb des grösseren Kreises: Ein Berührungskreis, welcher durch den gemeinsamen Berührungspunkt geht (siehe Aufgabe 43).

2). Punkt P auf einem der beiden Kreise: ein ungleichartiger Berührungskreis (siehe Aufgabe 40).

3). Punkt P innerhalb des grösseren, ausserhalb des kleineren Kreises: drei ungleichartige Berührungkreise, von denen einer durch den gemeinsamen Berührungspunkt geht.

4). Punkt P innerhalb des kleineren Kreises: ein Berührungskreis durch den gemeinsamen Berührungspunkt.

5). Punkt P fällt in den gemeinsamen Berührungspunkt: unzählige Lösungen durch den gemeinsamen Berührungspunkt gehend.

V. Der kleinere Kreis liegt im grösseren.

1). Punkt P ausserhalb des grösseren Kreises: Keine Lösung.

2). Punkt P auf einem der beiden Kreise: zwei Berührungskreise, ein gleichartig und ein ungleichartig berührender (siehe Aufgabe 46).

3). Punkt P innerhalb des grösseren, ausserhalb des kleineren Kreises: vier Berührungskreise, davon zwei den grossen Kreis von innen, den kleinen von aussen berührend, während die beiden anderen den grossen Kreis von innen, den kleinen umschliessend berühren.

4). Punkt P innerhalb des kleineren Kreises: Keine Lösung.

Liegt Punkt P auf einer gemeinsamen Tangente, so wird dadurch die Zahl der sonst möglichen Berührungskreise um einen vermindert, welcher in die gemeinsame Tangente ausartet.

Aufgabe 88. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene gleiche Kreise gleichartig berührt.

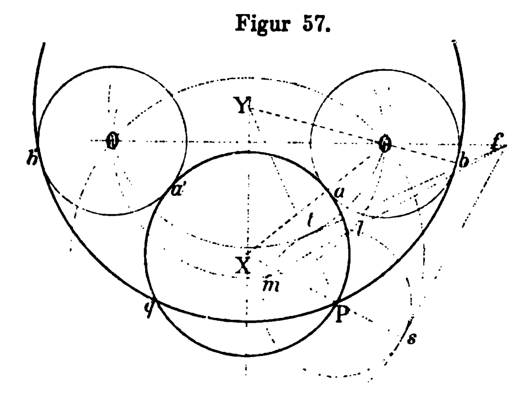
(Spezieller Fall von Aufgabe 87.)

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Voraussetzung: $r = r_1$.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 57.



(S. Erkl. 19.) Das Mittellot der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze.

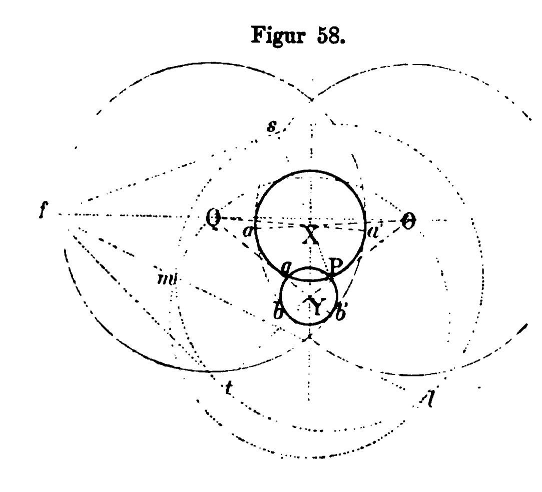
Analysis. Wenn die beiden Kreise O und Q gleichen Halbmesser r haben (Fig. 57 und 58), so fällt ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt ins Unendliche und die in Aufgabe 88 gelehrte Konstruktion wird hinfällig, während sie für ungleichartige Berührung, wo der innere Aehnlichkeitspunkt benützt wird, wörtlich gleich bleibt.

In beiden Figuren ist $XO = XQ = r + \varrho$ oder $r - \varrho$ oder $\varrho - r$, daher ist XOQ gleichschenklig, somit ist das Mittellot von OQ ein geometrischer Ort für X (siehe Erkl. 19). Daher muss Punkt X auch durch den zu P für dieses Mittellot als Achse symmetrischen Punkt q gehen (siehe Erkl. 15 und Aufgabe 85) und man hat daher die Aufgabe: einen Kreis durch P und q zu legen, welcher einen der gegebenen Kreise berührt (siehe Aufgabe 83).

Die Aufgabe lässt aber auch eine andere Lösung zu:

In Figur 57 ist $XO = XQ = r + \varrho$, $YO = YQ = \varrho - r$, in Figur 58 ist $XO = XQ = r - \varrho$ und überall $XP = \varrho$.

Figur 58.



(S. Erkl. 43.) Das Quadrat der Tangente ist gleich dem Produkt einer vom Endpunkt der Tangente ausgehenden Sekante und ihres äusseren Abschnitts.

Denkt man sich also um X bezw. Y einen durch O (und Q) gehenden Kreis beschrieben, welcher XP in s, YP in t schneidet, so ist $Ps = Pt = r$ und ein um P mit r beschriebener Kreis berührt den Hilfskreis in s und t. Man hat daher nach Aufgabe 83 einen Kreis durch O und Q zu legen, welcher den Kreis um P mit r berührt, so gibt der Berührungspunkt, mit P verbunden, den zweiten geometrischen Ort für den gesuchten Mittelpunkt.

Konstruktion. Beschreibe (Figur 57 und 58) um P einen Hilfskreis mit dem Halbmesser der Kreise O und Q, lege durch O und Q einen beliebigen Kreis, welcher diesen Hilfskreis in l und m schneidet, ziehe lm, welche OQ in f trifft, lege von f an den Hilfskreis die Tangenten fs und ft, ziehe sP und tP, welche das Mittellot von OQ in X bezw. Y schneiden, beschreibe um X und Y mit XP bezw. YP Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Man denke sich um X bezw. Y mit Halbmesser XO bezw. YO einen Kreis beschrieben, so geht derselbe auch durch Q, da sein Mittelpunkt auf dem Mittellot von OQ liegt, und berührt den Hilfskreis in s bezw. t, denn es ist nach dem Tangentensatz:

$$fO \,.\, fQ = fl \,.\, fm = \overline{fs}^2 = \overline{ft}^2 \text{ (Erkl. 47).}$$

Es ist somit $Xs = XO$ und $Yt = YO$, aber nach Konstruktion ist $Ps = Pt = Oa = Ob$. Daher ergibt sich in Figur 57 durch Subtraktion $XP = Xa$, in Figur 58 durch Subtraktion $YP = Yb$ und $XP = Xa$, in Figur 57 durch Addition $YP = Yb$, d. h. der Kreis um X mit XP bezw. um Y mit YP berührt den Kreis O in a bezw. b, also auch den Kreis Q in a' bezw. b'.

Aufgabe 89. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei einander berührende Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

(Spezieller Fall von Aufgabe 87.)

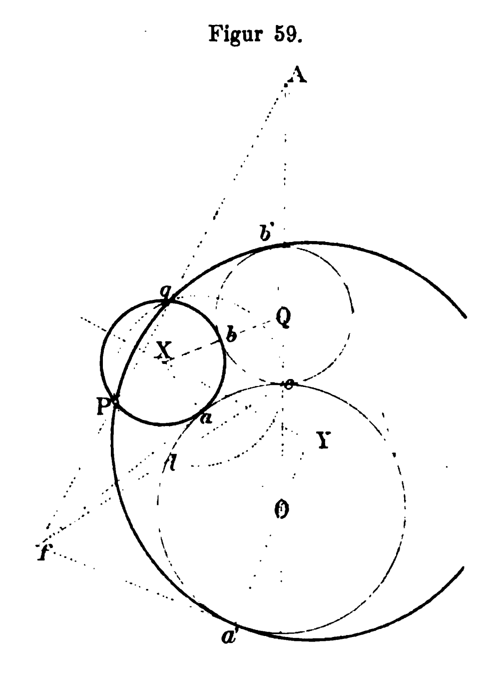
Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Voraussetzung: $OQ = r \pm r_1$.

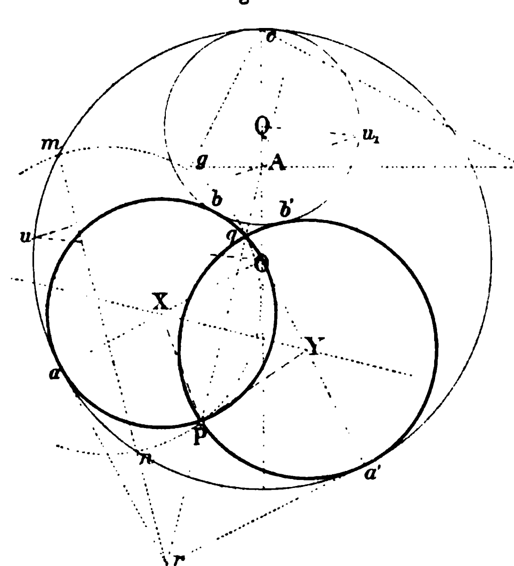
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Nach der Determination von Aufgabe 87, Fall II, 1 und IV, 3 gibt es in diesem Falle drei Berührungskreise, von denen einer die beiden gegebenen im gemeinsamen Berührungspunkte c (Fig. 59 und 60) berührt. Dieser Kreis kann nach

Figur 59.



Figur 60.



Aufgabe 40 ohne Hilfe von Proportionen gezeichnet werden. Es handelt sich nur um die beiden anderen. Die Punkte c und d_1 fallen hier in einen einzigen, den Berührungspunkt c, zusammen, folglich kennt man von dem Hilfskreis durch c, d, P, welcher den Punkt q liefert, nur zwei Punkte.

Die Gleichung:

$$\mathrm{AP} : \mathrm{A}q = \mathrm{A}c \, . \, \mathrm{A}d_1$$

bekommt hier die Form:

$$1). \ldots . \mathrm{AP} \, . \, \mathrm{A}q = \overline{\mathrm{A}c}^2,$$

woraus sich ergibt, dass der Hilfskreis im vorliegenden Fall die Zentrale in c berühren muss. Man hat also durch P einen Kreis zu legen, welcher Ac in c berührt (siehe Aufgabe 42). Im übrigen geht dann Konstruktion und Beweis nach Aufgabe 87 weiter.

In Figur 60 liegt P so, dass der Hilfskreis einen sehr grossen Halbmesser bekommen würde.

Man hat deshalb durch A die Senkrechte zu Ac gezogen, auf ihr Ae = AP gemacht, ce gezogen und auf ihr in c die Senkrechte errichtet. Diese schneidet Ae in g. Trägt man auf AP von A aus die Strecke Ag ab, so erhält man Punkt q. Denn nach dem Höhensatz des rechtwinkligen Dreiecks (siehe Erkl. 49) ist:

$$\overline{\mathrm{A}c}^2 = \mathrm{A}e \, . \, \mathrm{A}g = \mathrm{AP} \, . \, \mathrm{A}q.$$

Konstruktion und **Beweis** analog mit Aufgabe 87.

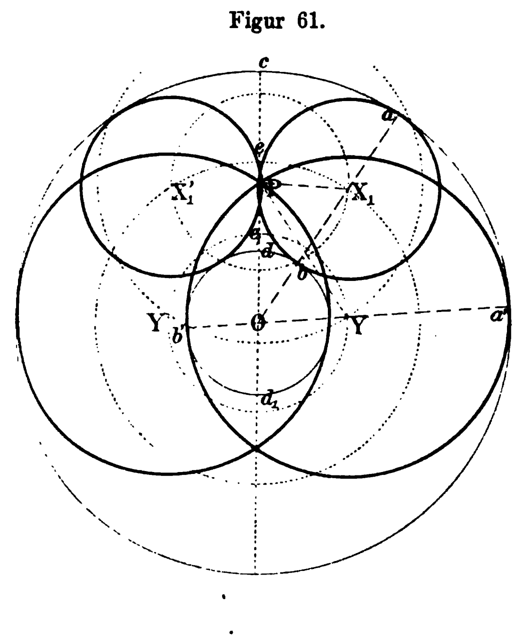
Aufgabe 90. Zwischen zwei konzentrische Kreise einen Berührungskreis zu legen, welcher durch einen zwischen den gegebenen Kreisen liegenden Punkt geht.

(Spezieller Fall von Aufgabe 87.)

Gegeben: P, zwei Kreise um O.
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Kreis X (Fig. 61) berühre den inneren Kreis von innen in a, den klei-

Figur 61.



neren von aussen in b, Kreis Y berühre den grösseren von innen in a_1, den kleineren umschliessend in b_1, so fallen die Halbmesser nach den Berührungspunkten in eine gerade Linie, es liegen also a, X, b, O einerseits, a_1, Y, O, b_1 anderseits in einer Geraden. Daher ist der Halbmesser von X $= \frac{1}{2} ab$ $= \frac{1}{2}(r - r_1)$, der Halbmesser von Y $= \frac{1}{2} a_1 b_1$ $= \frac{1}{2}(r + r_1)$.

Konstruktion. Ziehe einen Durchmesser des grossen Kreises, derselbe schneidet denselben in c, der dem Punkte c nähere Punkt des kleineren Kreises sei d, der entferntere d_1.

Halbiere cd in e, cd_1 in e_1, beschreibe um O mit dem Halbmesser Oe und um P mit dem Halbmesser ce Kreise, die einander in X und X_1 schneiden.

Beschreibe um O mit Oe_1 und um P mit ce_1 Kreise, die einander in Y und Y′ schneiden.

Beschreibe um X und X′, um Y und Y′ Kreise, welche durch P gehen, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Folgt aus der Analysis (siehe auch Frage 6, Frage 8, Aufgabe 3).

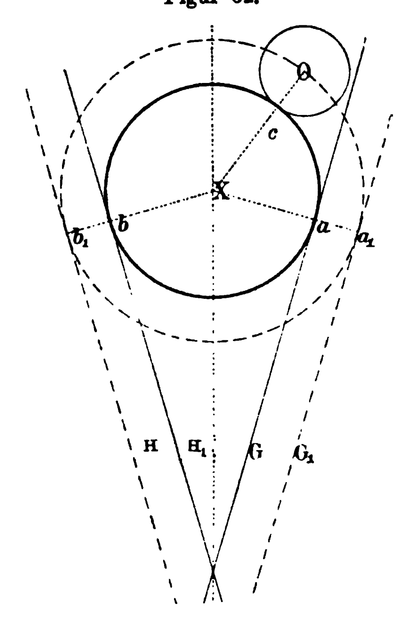
Anmerkung 18. Diese Aufgabe gehört eigentlich in den I. Abschnitt, ist aber hier der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt.

Aufgabe 91. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis berührt.

Gegeben: G, H, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 62.

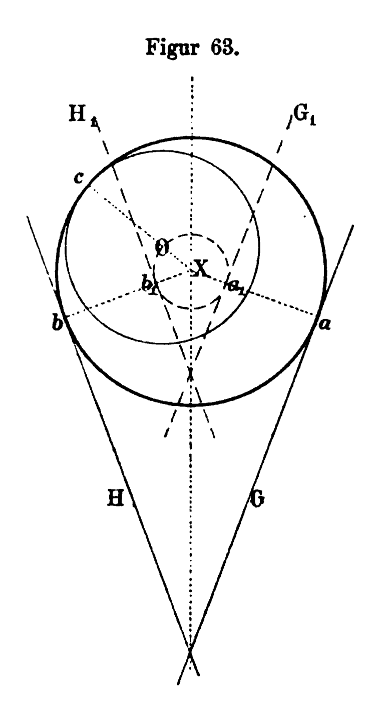


Analysis. Nach Frage 15 besteht ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt X des gesuchten Kreises aus den beiden Winkelhalbierenden der von den gegebenen Geraden gebildeten Winkel.

Angenommen, der Kreis X sei gefunden, er berühre Gerade G in a, Gerade H in b, Kreis O in c, und zwar in Figur 62 von aussen, in Figur 63 umschliessend, in Figur 64 von innen. Man denke sich um X einen zweiten Kreis gezeichnet, welcher durch O geht und die in Figur 62 verlängerten, in Figur 63 verkürzten, in Figur 64 über X rückwärts verlängerten Halbmesser Xa und Xb in a_1 bezw. b_1 schneidet, so ist in allen drei Figuren:

$$Xa_1 = Xb_1 = XO$$
$$Xa = Xb = Xc.$$

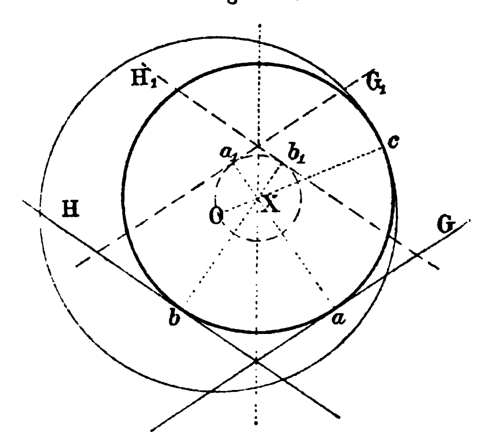
Figur 63.



Daraus folgt in Figur 62 und 63 durch Subtraktion, in Figur 64 durch Addition:

$$aa_1 = bb_1 = Oc.$$

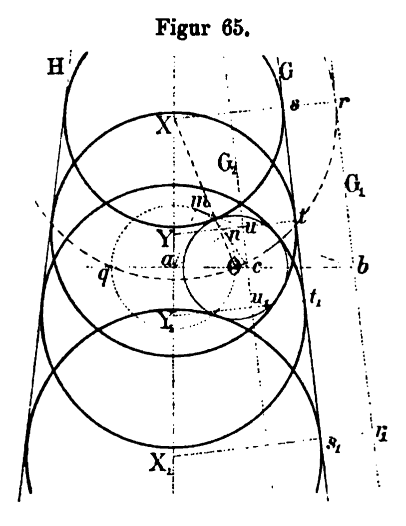
Figur 64.



Der konzentrische Kreis um X berührt daher in a_1 bezw. b_1 Parallelen, welche zu G bezw. H im Abstande Oc gezogen sind. Man hat daher die Aufgabe zurückgeführt auf die Aufgabe 85: den Mittelpunkt eines Kreises zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden (die Parallelen) berührt und durch einen gegebenen Punkt (den Mittelpunkt des gegebenen Kreises) geht.

Der konzentrische Kreis um X braucht dabei nicht selbst gezogen zu werden; da man ferner einen geometrischen Ort für X schon hat, so ist es nicht nötig zu G und H, sondern nur zu einer der beiden Geraden die Parallele zu zeichnen.

Figur 65.



Konstruktion. I. Fall. Der gegebene Kreis liege innerhalb eines der von G und H gebildeten Winkel.

Halbiere denjenigen Winkel zwischen G und H, in welchem Kreis O liegt.

Ziehe zu G im Abstand gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises die Parallelen G_1 und G_2 (G_1 jenseits, G_2 diesseits O).

Ziehe durch O die Senkrechte zur Halbierungsgeraden, welche die letztere in a, die Parallele G_1 in b, die Parallele G_2 in c trifft. Mache auf dieser Senkrechten $aq = a$O.

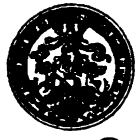
Suche die mittlere Proportionale zu bO und bq und trage dieselbe auf G_1 von b aus beiderseits bis r und r_1, errichte auf G_1 in r und r_1 Lote, welche die Halbierungsgerade in X und X_1, die Gerade in s und s_1

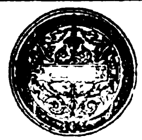
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

856. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 855. — Seite 65—80.
Mit 23 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 855. — Seite 65—80. Mit 23 Figuren.

Inhalt:

Die Hauptaufgaben des Berührungsproblems, gelöst durch Proportionen.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven** Zeichnens etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren,** Erklärungen nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln,** Regeln in Fragen mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, da **dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine vollständige** Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — **Wünsche, Fragen** etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M.** Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 64. Die Konstruktion der mittleren Proportionale ist in Figur 65 auf die Weise bewerkstelligt, dass um a mit aO ein Kreis beschrieben und an denselben von b bezw. c aus die Tangenten bm bezw. cn gelegt wurden, dann ist nach dem Tangentensatze:

$$\overline{bm}^2 = b\text{O} \,.\, bq$$

$$\overline{cn}^2 = c\text{O} \,.\, cq$$

(siehe Erkl. 43 und 49).

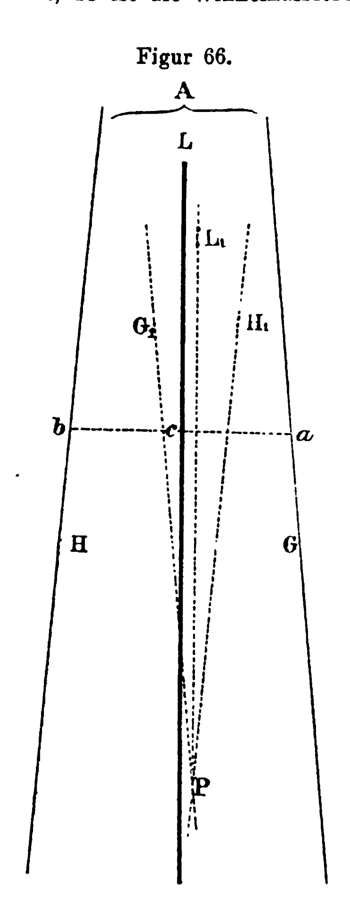
treffen, beschreibe um X und X_1 Kreise mit Xs bezw. $X_1 s_1$.

Suche ebenso die mittlere Proportionale zu cO und cq, trage sie auf G_2 von c aus beiderseits bis u und u_1, errichte auf G_2 in u und u_1 Lote, welche die G in t und t_1, die Halbierungsgerade in Y und Y_1 schneiden, beschreibe um Y mit Yu, um Y_1 mit $Y_1 u_1$ Kreise.

Die Kreise um X, X_1, Y, Y_1 sind die gesuchten.

Anmerkung 19. Wenn der Schnittpunkt von G und H ausserhalb des Zeichenblatts fällt, so ist die Winkelhalbierende nach Figur 66 zu zeichnen: Man ziehe durch P, einen beliebigen Punkt zwischen G und H, für welchen man in Aufgabe 91 den Punkt O wählen kann, die Parallelen G_1 und H_1 zu G bezw. H, halbiere den Winkel bei P zwischen G_1 und H_1, ziehe zu der Winkelhalbierenden PL_1 die Senkrechte ab durch einen beliebigen Punkt, halbiere ab in c, ziehe durch c die Parallele zu PL_1, so ist dieselbe die gesuchte Winkelhalbierende.

Figur 66.



Denn da:

$$PG_1 \parallel G, \; PH_1 \parallel H \text{ und } c\text{L} \parallel PL_1$$

ist, so ist, weil PL_1 den Winkel bei P halbiert, cL die Richtung der gesuchten Halbierungsgeraden des Winkels am unzugänglichen Schnittpunkt A. Da ab zu dieser Richtung senkrecht steht, so ist das Dreieck Aab gleichschenklig. cL ist das Mittellot der Grundlinie und halbiert daher den Winkel an der Spitze (siehe Erkl. 65).

Erkl. 65. Das Mittellot der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den dort liegenden Winkel.

Beweis. Der Mittelpunkt von Kreis X (Fig. 65) liegt auf der Winkelhalbierenden, sein Halbmesser ist das Lot von X auf G, daher berührt er G (siehe Erkl. 10) und wegen der Symmetrie in Bezug auf die

Winkelhalbierende als Axe auch H. Nach Konstruktion ist:

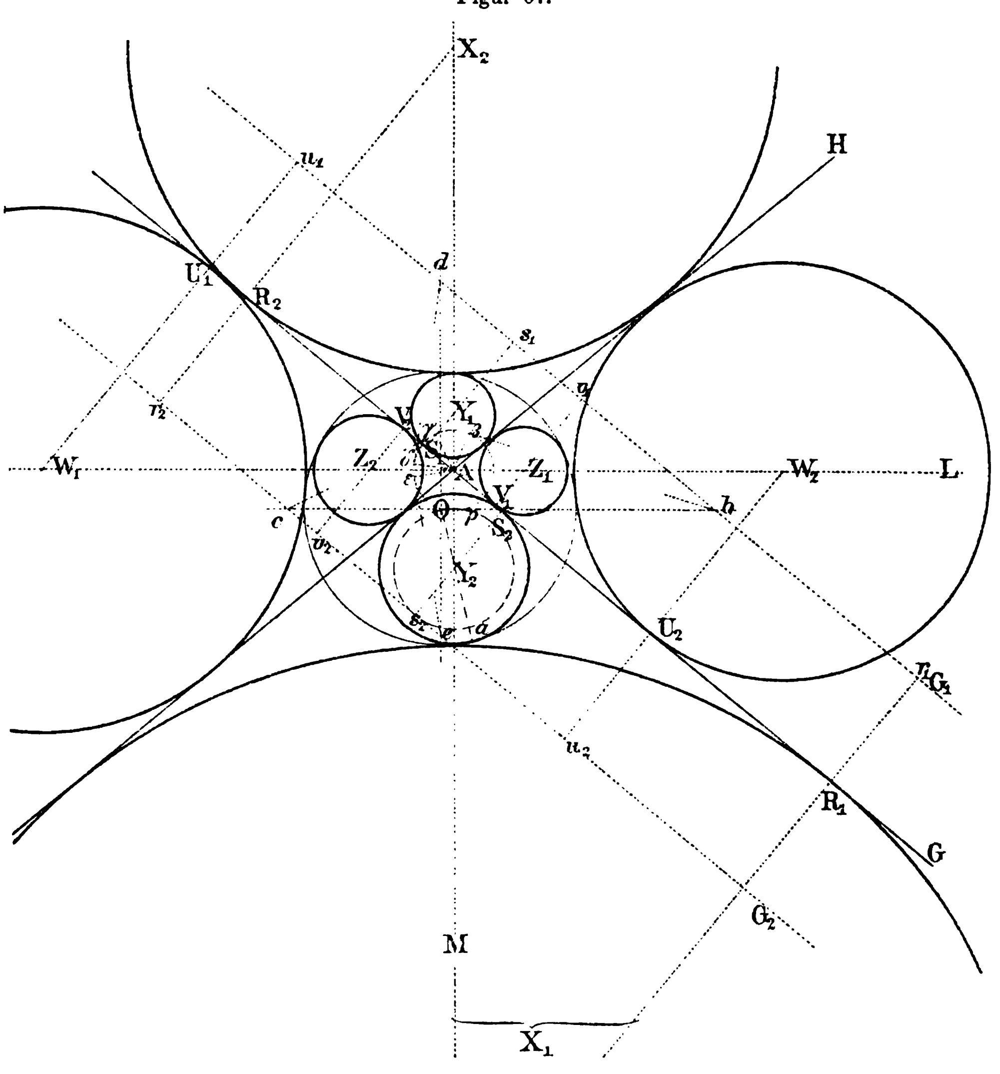
$$\overline{br}^2 = b0 \,.\, bq = (ba + a0)(ba - a0).$$

Ein um X mit X*r* beschriebener Kreis berührt daher G_1 in *r* und geht durch 0 und *q*, zieht man also 0X, welche den gegebenen Kreis in *c* trifft, so ist $Xr = X0$, aber nach Konstruktion ist $sr = 0c$, folglich $Xs = Xc$; Kreis X berührt daher den gegebenen Kreis in *c* (siehe Erkl. 4).

Analog ist der Beweis für die andern Kreise.

II. Fall. Der gegebene Kreis schneidet jeden der vier Winkel zwischen G und H.

Figur 67.



Ziehe zu G die Parallelen G_1 und G_2 im Abstande gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises. Halbiere die von G und H in ihrem Schnittpunkt A gebildeten Winkel durch die Geraden AL und AM, ziehe zu AL und AM Senkrechten durch O, die erste schneidet G_1 in b, G_2 in c, die zweite schneidet G_1 in d, G_2 in e; beschreibe um A mit AO einen Kreis, lege an denselben von b, c, d, e aus die Tangenten $b\beta$, $e\gamma$, $d\delta$, $e\varepsilon$.

Mache auf G_1 von b aus die Strecken $br_1 = bs_1 = b\beta$, auf G_2 von c aus die Strecken $cr_2 = cs_2 = c\gamma$; errichte in r_1, s_1, r_2, s_2 auf G_1 bezw. G_2 Lote, welche AL in X_1, Y_1, X_2, Y_2, die Gerade G in R_1, S_1, R_2, S_2 schneiden und beschreibe um X_1 mit X_1R_1, um X_2 mit X_2R_2, um Y_1 mit Y_1S_1, um Y_2 mit Y_2S_2 Kreise.

Mache ferner auf G_1 von d aus die Strecken $du_1 = dv_1 = d\delta$ und auf G_2 von e aus die Strecken $eu_2 = ev_2 = e\varepsilon$, errichte in u_1, v_1, u_2, v_2 auf G_1 bezw. G_2 Lote, welche AM in W_1, Z_1, W_2, Z_2, die Gerade G in U_1, V_1, U_2, V_2 schneiden; beschreibe um W_1 mit W_1U_1, um W_2 mit W_2U_2, um Z_1 mit Z_1V_1, um Z_2 mit Z_2V_2 Kreise.

Die acht erhaltenen Kreise genügen der Aufgabe.

Beweis. Man denke sich (Fig. 67) um Y_2 einen Kreis mit Y_2s_2 beschrieben, so berührt derselbe die G_2 in s_2 (siehe Erkl. 10). Der Kreis um A mit AO schneide bc zum zweitenmale in p, so liegen O und p symmetrisch auf beiden Seiten von AY_2 (siehe Erkl. 51). Nun ist nach dem Tangentensatze:

$$\overline{cs_2}^2 = \overline{c\gamma}^2 = cO \cdot cp;$$

daher geht nach der Umkehrung des Tangentensatzes (siehe Erkl. 47 und Aufgabe 82) Kreis Y_2, dessen Mittelpunkt auf dem Mittellot von Op liegt, durch O und p.

(S. Erkl. 47.) Die Umkehrung des Tangentensatzes lautet:

Liegen auf dem einen Schenkel eines Winkels ein, auf dem anderen zwei Punkte so, dass der Abstand des ersten Punkts von der Spitze mittlere Proportionale zu den Abständen der beiden anderen Punkte von der Spitze ist, so berührt der durch die drei Punkte gelegte Kreis den ersten Schenkel in dem gegebenen Punkt.

Es ist somit:

$$OY_2 = s_2Y_2.$$

OY_2 schneide den gegebenen Kreis in a, so ist nach Konstruktion:

$$Oa = S_2s_2,$$

nach dem Vorigen:

$$OY_2 = Y_2s_2,$$

daher durch Subtraktion:

$$Y_2a = Y_2s_2.$$

Der Kreis um Y_2 mit Y_2s_2 berührt also den gegebenen Kreis in a.

Analog ist der Beweis für die anderen Kreise.

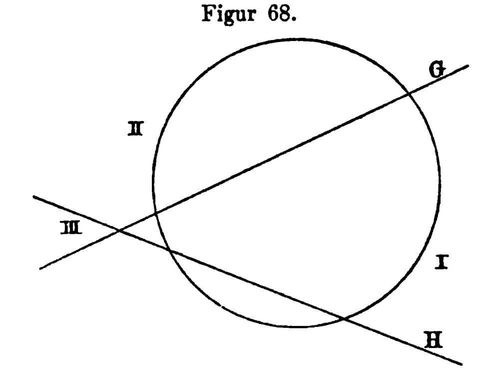
Determination. Die bei vorliegender Konstruktion als Hilfsaufgabe verwendete Aufgabe 82, einen Kreis zu suchen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Geraden berührt, lässt bekanntlich zwei Auflösungen zu.

Diese wird aber verwendet auf vier Paare von Parallelen, nämlich G_1 und H_1, G_2 und H_2, G_1 und H_2, G_2 und H_1, wenn H_1 und H_2 die — in Figur 65 und 69 nicht gezeichneten — Parallelen zu H bedeuten.

I. Es gibt also im günstigsten Falle acht Lösungen, wenn nämlich Punkt O innerhalb des von den vier Parallelen gebildeten Rhombus liegt, oder, was dasselbe ist, wenn der Schnittpunkt A von G und H innerhalb des gegebenen Kreises liegt.

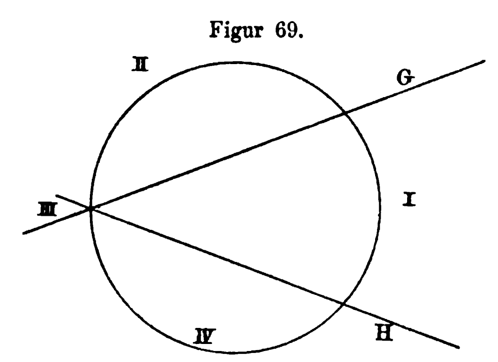
In diesem Falle liegt in jedem der vier Winkelräume, welche G und H mit einander bilden, ein Teil des Kreises O, und in jedem dieser Winkelräume entsteht dann ein von aussen und ein von innen berührender Kreis.

Figur 68.



II. Schneidet der Kreis O beide Geraden, aber so, dass der Schnittpunkt ausserhalb des Kreises liegt (Figur 68), so liegen in dem Winkelraum I, welcher die vier Schnittpunkte enthält, zwei äussere und zwei innere Berührungskreise, in den Winkelräumen II und IV je zwei äussere, zusammen also acht Berührungskreise.

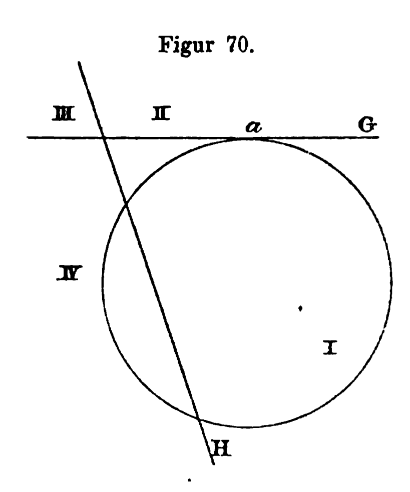
Figur 69.



III. Liegt der Schnittpunkt von G und H auf dem Kreis (Figur 69), so liegt im Winkelraum I ein äusserer und ein innerer, in den Räumen II und IV je ein äusserer, zusammen also vier Berührungskreise.

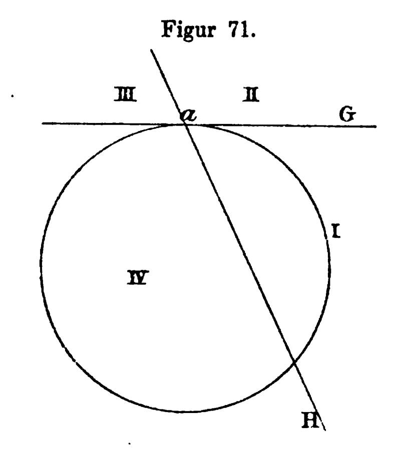
IV. Wird eine Gerade vom Kreis berührt, die andere geschnitten (Figur 70), so gibt es sechs Berührungskreise, nämlich im Winkelraum I zwei äussere und einen inneren, welcher durch den Berührungspunkt *a* geht, im Raum II

Figur 70.



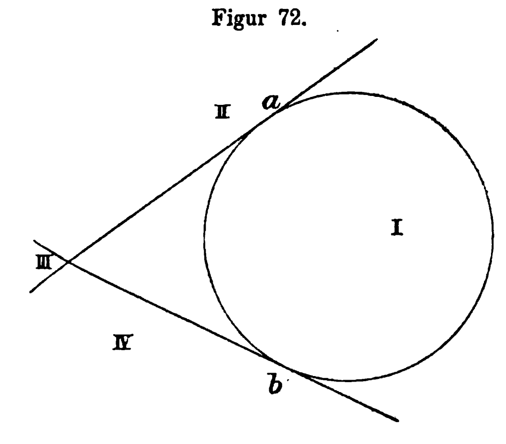
einen äusseren, welcher ebenfalls durch *a* geht und im Raum IV zwei äussere. Zu den Kreisen in Raum I und II vergl. Aufgabe 37.

Figur 71.



V. **Berührt eine Gerade den Kreis und geht die andere durch den Berührungspunkt** (Fig. 71), so gibt es nur **zwei Berührungskreise**, nämlich je einen äusseren in den Räumen I und II.

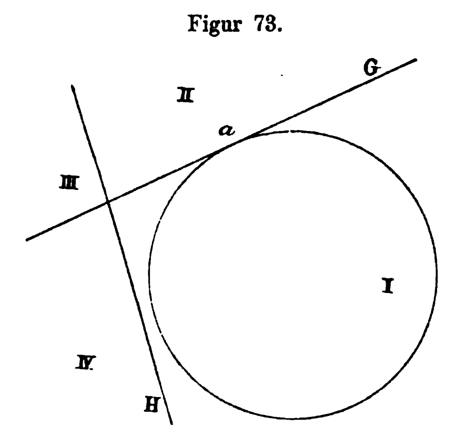
Figur 72.



VI. **Berührt der Kreis beide Geraden** (Fig. 72), so gibt es in dem Winkelraum I, in welchem er liegt, zwei äussere Berührungskreise, in den Winkelräumen II und IV je einen äusseren, der durch den Berührungspunkt mit der zunächst liegenden Geraden geht, also zusammen **vier** Berührungskreise. Diese sind sämtlich ohne Proportionen zu finden.

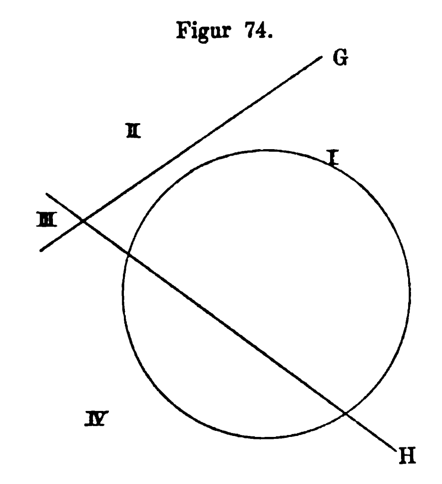
VII. Wird eine der Geraden vom Kreis berührt, die andere weder berührt noch geschnitten (Fig. 73), so liegen im Winkelraum I zwei äussere Berührungskreise und

Figur 73.



ein durch den Berührungspunkt *a* gehender umschliessender, im Winkelraum II noch einer, welcher durch *a* geht, zusammen also vier.

Figur 74.



VIII. Wird eine der Geraden vom Kreis geschnitten, die andere nicht (Fig. 74), so gibt es im Winkelraum I zwei äussere Berührungskreise, ebenso im Winkelraum II, zusammen also vier.

IX. Liegt der Kreis ganz innerhalb eines Winkelraumes (Fig. 65), so gibt es in diesem zwei äussere und zwei umschliessende Berührungskreise, also zusammen vier.

X. Besondere Vereinfachungen treten ein, wenn O auf einer der Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den Geraden liegt (siehe Aufgabe 48).

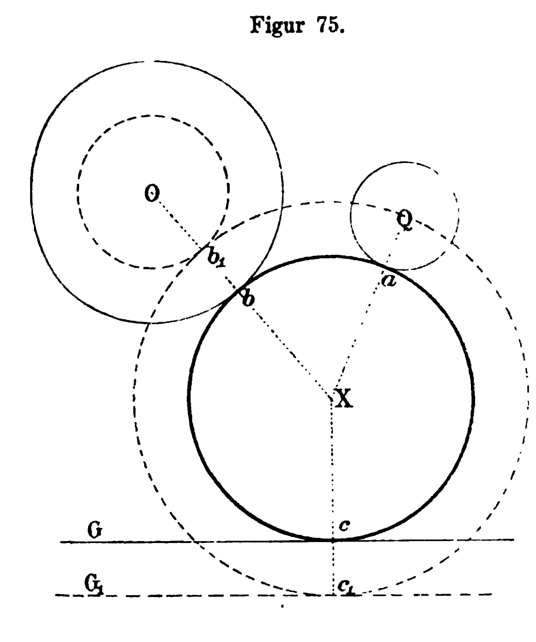
Aufgabe 92. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt.

Gegeben: G, Kreis um O, Kreis um Q.

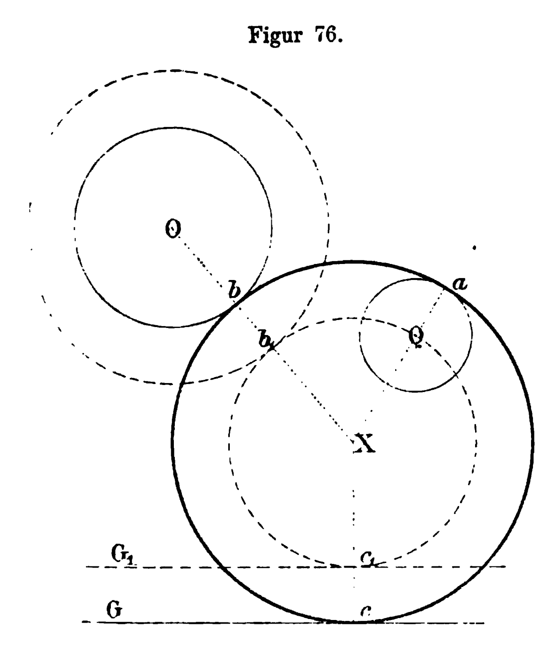
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Angenommen, der Kreis X sei gefunden (Fig. 75—78), er berühre die Gerade G in *c*, Kreis O in *b*, Kreis Q in *a* und es sei der Halbmesser r von Kreis O grösser als der Halbmesser r_1 von Kreis Q. Man denke sich um X einen zu dem ge-

Figur 75.



Figur 76.



suchten konzentrischen Kreis beschrieben, welcher durch O geht und Xc in c_1, XO in b_1 schneidet, so ist in allen vier Fällen:

$$XQ = Xb_1 = Xc_1$$
$$Xa = Xb = Xc,$$

daher findet man durch Addition oder Subtraktion:

$$Qa = bb_1 = cc_1.$$

Der konzentrische Kreis berührt daher eine Parallele G_1 zu G durch c_1 (im Abstande r_1) und einen zum gegebenen Kreis O konzentrischen Kreis durch b_1 (mit Halbmesser $r \pm r_1$). Die vorliegende Aufgabe ist daher auf die Aufgabe 86 reduziert: Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt Q geht, eine gegebene Gerade, die Parallele G_1, und einen gegebenen Kreis, den konzentrischen Kreis um O, berührt. Bei der Ausführung sind vier Hauptfälle zu unterscheiden:

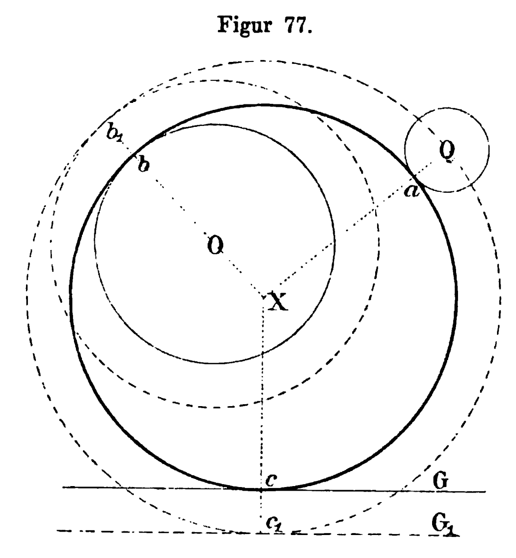
Der gesuchte Kreis berührt O und Q gleichartig und zwar: entweder von aussen (Fig. 75), dann hat der konzentrische Kreis den Halbmesser $r - r_1$ und die Parallele G_1 liegt jenseits G; oder umschliessend (Fig. 78), der konzentrische Kreis hat den Halbmesser $r - r_1$, die Parallele liegt diesseits.

Der gesuchte Kreis berührt die beiden Kreise ungleichartig und zwar entweder Q von aussen, O umschliessend oder von innen (Fig. 77), Halbmesser des konzentrischen Kreises: $r + r_1$, Parallele jenseits; oder Q umschliessend, O von aussen (Fig. 76), Halbmesser des konzentrischen Kreises: $r + r_1$, Parallele diesseits.

Nun lässt die Aufgabe 86 vier Lösungen zu, nämlich zwei äussere und zwei innere (umschliessende) Berührungskreise; von diesen vier sind jedoch bei jeder Kombination eines der beiden konzentrischen Kreise mit einer der beiden Parallelen nach dem vorhin Gesagten nur zwei zu benützen. Nach Aufgabe 86 erhält man die zwei Paare von Lösungen, je nachdem man den von der Geraden entferntesten (für äussere Berührung) oder ihr nächsten (für innere Berührung) Punkt des Kreises mit dem gegebenen Punkte verbindet.

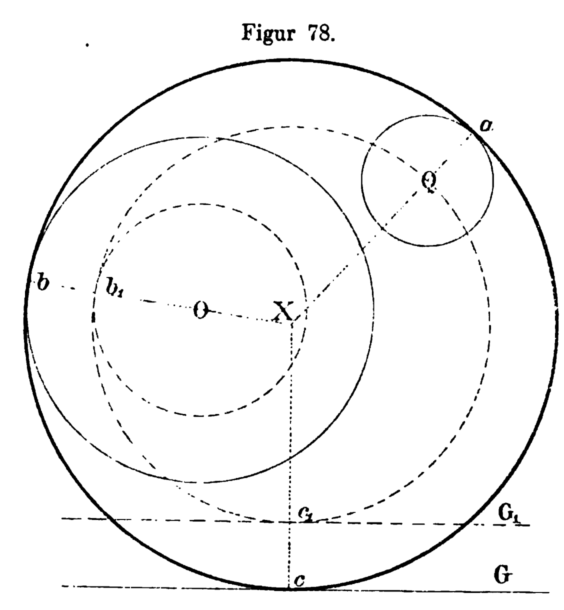
Es ist daher im ersten und vierten Falle

Figur 77.



der von G entfernteste, im zweiten und dritten Falle der G nächste Punkt des konzentrischen Kreises mit Q zu verbinden.

Figur 78.



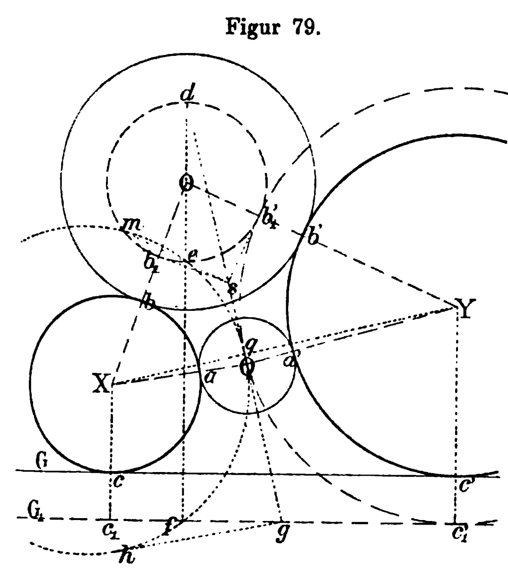
Konstruktion. I. Fall. Der gesuchte Kreis berührt beide gegebenen von aussen (Fig. 79).

Ziehe zu G die Parallele G_1 im Abstand gleich dem Halbmesser r_1 von Kreis Q und zwar auf der von Q und O abgewandten Seite.

Beschreibe um O einen Kreis mit der Differenz $r - r_1$ der gegebenen Halbmesser.

Ziehe durch O die Senkrechte zu G_1, welche letztere in *f*, den konzentrischen Kreis in *d* und *e* trifft, wobei *d* der von G_1 entferntere Punkt ist.

Figur 79.



Ziehe dQ, welche die Parallele in g trifft. Lege durch e, f, Q einen Hilfskreis, welcher dQ in q zum zweitenmale schneidet und errichte auf Qq das Mittellot, was man nach Erkl. 15 auch dadurch erreicht, dass man vom Mittelpunkt des Hilfskreises auf dQ die Senkrechte fällt. (In Figur 79 berührt der Hilfskreis die dQ fast, daher liegt q sehr nahe bei Q und das Mittellot ist auf die angegebene Weise zu zeichnen.)

Ziehe von g an den Hilfskreis die Tangente gh und mache auf G_1 von g aus die Strecken gc_1 und $gc'_1 = gh$.

Errichte auf G_1 in c_1 und c'_1 die Lote, welche G in c und c' und das Mittellot von Qq in X und Y treffen. Beschreibe um X mit Xc, um Y mit Yc' Kreise, diese sind die gesuchten.

Wird die Konstruktion der Tangente gh unbequem, so verbindet man den zweiten Schnittpunkt m des Hilfskreises und des konzentrischen Kreises mit e, erhält dadurch auf dQ den Punkt s, von welchem aus an den konzentrischen Kreis die Tangenten sb_1 und sb'_1 gezogen werden, Ob_1 und Ob'_1 geben auf dem Mittellot von Qq die Punkte X und Y.

Beweis. Nach Aufgabe 86 berührt ein um Y mit Yc'_1 beschriebener Kreis den konzentrischen Kreis in b'_1 und geht durch O und q, oder ein um Y mit Yb'_1 beschriebener Kreis geht durch O und q und berührt G_1 in c'_1. Es ist also:

$$YQ = Yb'_1 = Yc'_1 \text{ (Erkl. 1)},$$

aber nach Konstruktion ist:

$$Qa' = b'_1 b' = c'_1 c'.$$

Durch Subtraktion findet man daraus:

$$Ya' = Yb' = Yc'.$$

Der Kreis um Y mit Yc' berührt also den Kreis O in b', den Kreis Q in a'.

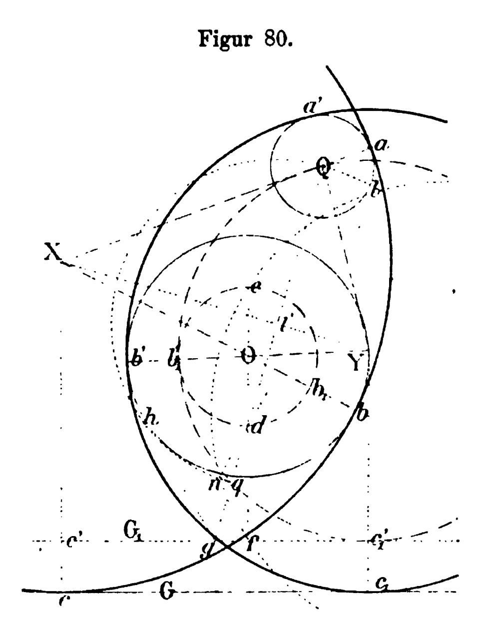
Analog ist der Beweis für Kreis X.

Anmerkung 20. Zur ersten Art der Konstruktion (Benützung des Punkts g) ist der konzentrische Kreis um O selbst nicht notwendig, sondern nur die Punkte d und e, zur zweiten Art (Benützung des Punkts s) ist die Parallele nicht notwendig, sondern nur Punkt f.

II. Fall. Der gesuchte Kreis berührt die beiden gegebenen umschliessend. (Fig. 80.)

Ziehe zu G die Parallele G_1 im Abstande gleich dem Halbmesser r_1 von Kreis Q und zwar diesseits Q. Fälle von O auf G_1 das Lot Of und mache auf ihm Od = Oe = $r - r_1$, und zwar d zwischen O und f. Ziehe

Figur 80.



Qd, welche G_1 in g trifft. Suche die vierte Proportionale zu dQ, df, de und trage sie auf Qd von d gegen g hin nach q. Dies geschieht z. B. so dass man durch e und f einen beliebigen Kreis beschreibt, $dl = dQ$ von d aus in den Kreis legt, ld schneidet diesen Kreis zum zweitenmale in n, so ist nach dem Sekantensatz:

$$dl \,.\, dn = de \,.\, df$$

oder

$$dQ \,.\, dn = de \,.\, df$$

oder

$$dQ : df = de : dn,$$

also dn die gesuchte vierte Proportionale. Suche die mittlere Proportionale zu gQ und gq und trage sie auf G_1 von g aus beiderseits nach c_1 und c'_1. Diese mittlere Proportionale findet man z. B. indem man durch q und Q einen beliebigen Kreis legt und an diesen von g aus die Tangente gh zieht, denn dann ist nach dem Tangentensatz:

$$\overline{gh}^2 = gQ \,.\, gq.$$

Errichte auf Qq das Mittellot. Errichte auf G_1 in c_1 und c'_1 Lote, welche G in c und c' und das Mittellot von Qq in X und Y schneiden. Beschreibe um X mit Xc, um Y mit Yc' Kreise, diese sind die gesuchten.

Beweis. Ein Kreis um Y mit Yc'_1 berührt nach Aufgabe 86 G_1 in c_1', den Kreis um O mit Halbmesser $Od = Oe$ in b_1' und geht durch Q und q.

Daher ist:

$$YQ = Yb'_1 = Yc'_1 \text{ (Erkl. 1)},$$

aber nach Konstruktion ist:

$$Qa' = b'b'_1 = c'c'_1.$$

Daraus findet man durch Addition:

$$Ya' = Yb' = Yc'.$$

Der Kreis um Y berührt also Kreis Q in a', Kreis O in b', Gerade G in c'.

Analog ist der Beweis für Kreis X.

Anmerkung 21. Konstruktion und Beweis ist derselbe, wenn Kreis Q innerhalb des Kreises O liegt, Gerade G den Kreis O schneidet; die Kreise X und Y berühren dann Kreis O von innen, Kreis Q umschliessend.

III. Fall. Der gesuchte Kreis berührt den Kreis O von aussen, den Kreis Q umschliessend.

Die Konstruktion ist ganz analog mit derjenigen von Fall I, nur dass um O ein zum gegebenen konzentrischer Kreis mit Halb-

Figur 81.

messer $r + r_1$ gezeichnet werden muss und die Parallele G_1 diesseits G liegt.

Beim Beweis ergibt sich aus den beiden Gleichungen:

$$YQ = Yb'_1 = Yc'_1$$

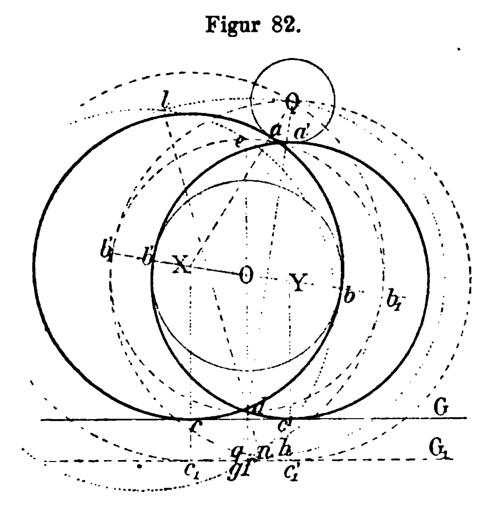
und

$$Qa' = b'b'_1 = c'c'_1$$

durch Addition die Gleichung:

$$Ya' = Yb' = Yc'.$$

Figur 82.



IV. Fall. Der gesuchte Kreis berührt den Kreis O umschliessend, den Kreis Q von aussen.

Die Konstruktion ist ganz analog mit derjenigen von Fall II, nur dass um O ein konzentrischer Kreis mit $r + r_1$ gezeichnet werden muss und die Parallele G_1 jenseits G liegt.

Beim Beweis ergibt sich die dritte Gleichung aus den beiden ersten durch Subtraktion.

Anmerkung 22. Die Konstruktion bleibt dieselbe, wenn der Kreis Q im Kreis O liegt und G den Kreis O schneidet; der gesuchte Kreis berührt dann Kreis Q von aussen, Kreis O von innen.

Determination. Aus der Konstruktion ergeben sich acht Berührungskreise als höchstmögliche Zahl. Diese wird erreicht, wenn beide Kreise auf derselben Seite der Geraden auseinander liegen und keiner derselben die Gerade schneidet oder berührt.

Keine Lösung gibt es:

1). wenn beide Kreise auseinander liegen

und die Gerade zwischen ihnen hindurchgeht, ohne einen zu berühren,

2). wenn einer der Kreise im andern liegt und die Gerade den äusseren weder schneidet noch berührt,

3). wenn beide Kreise einander schneiden und die Gerade gemeinschaftliche Sehne ist.

Unzählige Lösungen gibt es, wenn beide Kreise und die Gerade einander im selben Punkte berühren.

Die Zahl der sonst möglichen Lösungen wird um eine vermindert, wenn die Gerade parallel mit einer der gemeinschaftlichen Tangenten an beide Kreise ist (siehe Determination von Aufgabe 87). Die Zahl der sonst möglichen Lösungen wird um zwei vermindert, wenn die Gerade einen beider Kreise berührt.

Höchstens vier Lösungen gibt es, wenn die Gerade einen der beiden Kreise schneidet, den andern aber nicht, oder wenn beide Kreise einander schneiden, die Gerade keinen von ihnen schneidet oder berührt.

Höchstens sechs Lösungen gibt es, wenn die beiden Kreise einander schneiden und jeder von ihnen von der Geraden geschnitten wird. Geht aber im letzteren Falle die Gerade durch einen der Schnittpunkte, so sind nur vier Berührungskreise möglich.

Ist die Gerade gemeinsame Tangente an beide Kreise, so sind vier Berührungskreise möglich, wenn die Kreise auseinander liegen und die Gerade äussere Tangente ist, andernfalls nur zwei.

Eine eingehendere Diskussion der verschiedenen Fälle erhält man, wenn man die Determination von Aufgabe 87 auf jeden der vier Fälle der Konstruktion anwendet. Bei der grossen Verschiedenheit der Lagen zweier Kreise gegen einander und gegen eine Gerade wäre eine eingehendere Behandlung der Determination zu weitläufig.

Aufgabe 93. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Gesucht: Kreis um X.

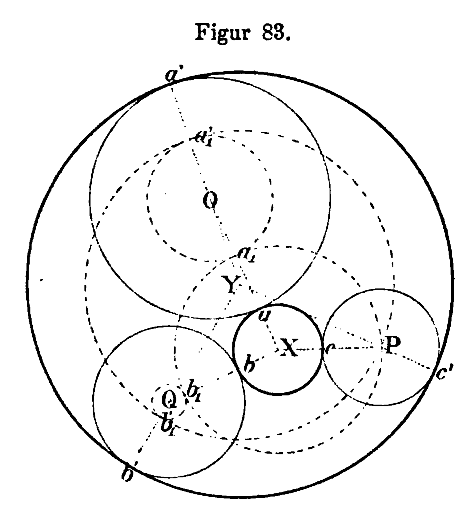
Analysis. Angenommen, der gesuchte Kreis X sei gefunden (Fig. 83—86), er berühre den Kreis O in a, Kreis Q in b, Kreis P in c und es sei der Halbmesser von Kreis O $= r$, von Kreis Q $= r_1$, von Kreis P $=$

r_2, wobei angenommen wird, dass $r < r_1 < r_2$ ist.

Man denke sich um X einen konzentrischen Kreis beschrieben, welcher durch P geht und Xa in a_1, Xb in b_1 schneidet, so ist in allen vier Figuren:

$$\mathrm{XP} = \mathrm{X}a_1 = \mathrm{X}b_1 \text{ (Erkl. 1)}$$
$$\mathrm{X}c = \mathrm{X}a = \mathrm{X}b.$$

Figur 83.



Daraus findet man durch Subtraktion oder Addition:

$$\mathrm{P}c = aa_1 = bb_1.$$

Es ist daher:

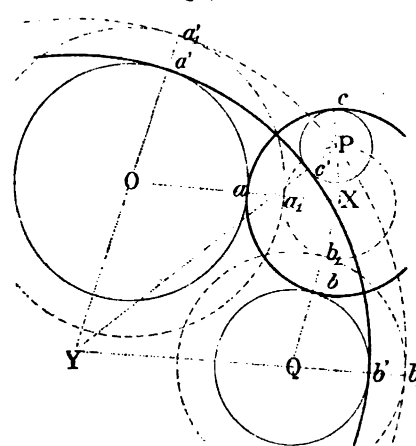
$$\mathrm{O}a_1 = r \pm r_2$$
$$\mathrm{O}b_1 = r_1 \pm r_2.$$

Der konzentrische Kreis um X muss also einen zu Kreis O konzentrischen Kreis mit Halbmesser $r \pm r_2$ in a_1 und einen zu Kreis Q konzentrischen Kreis mit Halbmesser $r_1 \pm r_2$ in b_1 berühren. Daher ist die vorliegende Aufgabe zurückgeführt auf die Aufgabe 87: Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt (P) geht und zwei gegebene Kreise (die beiden konzentrischen um O und Q) berührt.

Bei der Ausführung sind vier Hauptfälle zu unterscheiden:

I. Der gesuchte Kreis (Fig. 83) berührt alle drei gegebenen Kreise gleichartig, und zwar wie Kreis X von aussen, oder wie Kreis Y umschliessend. Der Halbmesser des zum gesuchten Kreise konzentrischen, durch P gehenden, ist bei Kreis X um r_2 grösser, bei Kreis Y um r_2 kleiner als der Halbmesser des gesuchten Kreises selbst. Daher berühren diese beiden konzentrischen Hilfskreise um X und Y diejenigen konzentrischen Kreise um P und Q, welche mit den Halbmessern $r - r_2$ und $r_1 - r_2$ beschrieben sind.

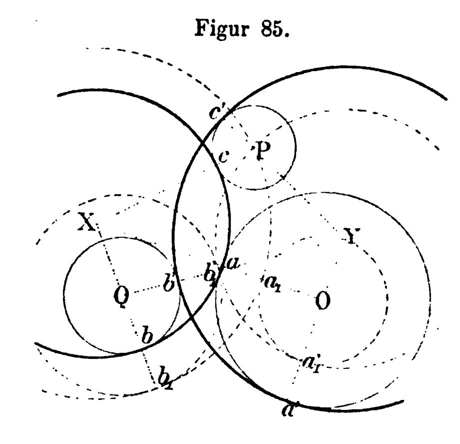
Figur 84.



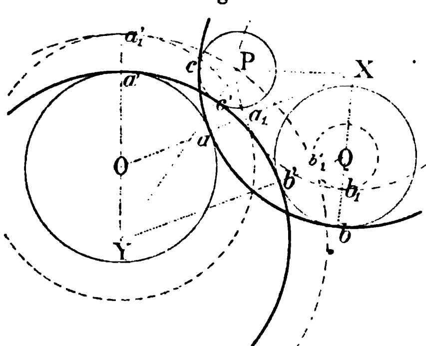
II. In Figur 84 berührt Kreis X die Kreise O und Q von aussen, den Kreis P umschliessend, der zu X konzentrische durch P berührt daher die äusseren konzentrischen Kreise um O und Q mit den Halbmessern $r + r_2$ und $r_1 + r_2$. Der Kreis Y berührt Kreis O und Q umschliessend, Kreis P von aussen; der zu Y konzentrische durch P berührt also ebenfalls die äusseren konzentrischen Kreise um O und Q mit den Halbmessern $r + r_2$ und $r_1 + r_2$.

III. In Figur 85 berührt Kreis X die Kreise O und P von aussen, Kreis Q umschliessend; Kreis Y berührt die Kreise O

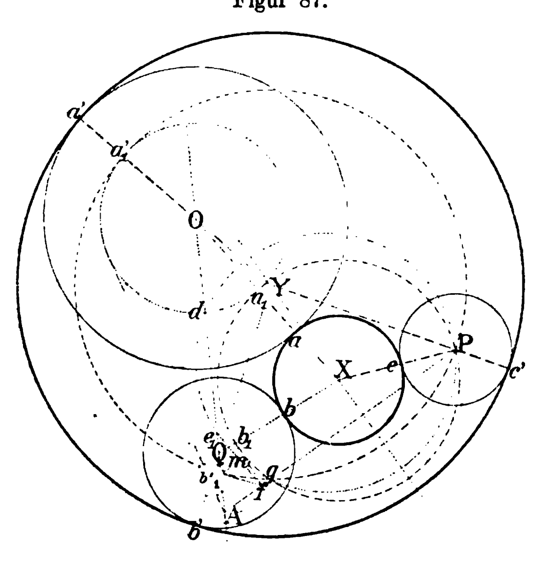
Figur 85.



Figur 86.



Figur 87.



und P umschliessend, Kreis Q von aussen; die zu X und Y konzentrischen Kreise, welche durch P gehen, berühren folglich den inneren konzentrischen Kreis um O mit Halbmesser $r - r_2$ und den äusseren konzentrischen Kreis um Q mit Halbmesser $r_1 + r_2$.

IV. In Figur 86 berührt Kreis X die Kreise Q und P umschliessend, den Kreis O von aussen; Kreis Y berührt die Kreise Q und P von aussen, den Kreis O umschliessend. Die zu X und Y konzentrischen Kreise, welche durch P gehen, berühren daher beide den äusseren zu O konzentrischen Kreis mit Halbmesser $r + r_2$ und den inneren zu Q konzentrischen Kreis mit Halbmesser $r_1 - r_2$.

Die bei der vorliegenden Aufgabe zu benützende Aufgabe 87 liefert zwei Paare von Berührungskreisen, je nachdem man den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise anwendet. Bei Benützung des äusseren Aehnlichkeitspunkts erhält man die zwei Berührungskreise, welche die gegebenen Kreise gleichartig, durch den inneren Aehnlichkeitspunkt diejenigen beiden, welche sie ungleichartig berühren.

Nun ist aber in den Fällen I und II gleichartige, in den Fällen III und IV ungleichartige Berührung vorausgesetzt. Man muss somit in den Fällen I und II den äusseren, in den Fällen III und IV den inneren Aehnlichkeitspunkt der zu O und Q konzentrischen Kreise mit den Halbmessern $r \pm r_2$ und $r_1 \pm r_2$ benützen und erhält so acht Berührungskreise als höchste Zahl der Lösungen.

Konstruktion. I. Fall. Kreis O, Q, P sollen gleichartig, von aussen oder umschliessend, berührt werden.

Verkürze den Halbmesser r von Kreis O und den Halbmesser r_1 von Kreis Q je um den Halbmesser r_2 von Kreis P (Fig. 87) und beschreibe mit den verkürzten Halbmessern konzentrische Kreise zu den gegebenen, welche die Zentrale OQ auf der inneren Seite in den Punkten d und e_1 schneiden.

Suche den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der konzentrischen Kreise und verbinde ihn mit P.

Lege durch d, e_1, P einen Hilfskreis, welcher AP in q schneidet; errichte auf Pq das Mittellot.

Verbinde e_1 mit dem zweiten Schnittpunkt m des Hilfskreises und des konzen-

trischen Kreises um Q, die Verbindungsgerade schneidet AP in f, lege von f an den konzentrischen Kreis um Q die Tangenten fb_1 und fb'_1.

Ziehe Qb_1 und Qb'_1, welche das Mittellot von Pq in X und Y, den gegebenen Kreis Q in b und b' schneiden, und beschreibe um X mit Xb, um Y mit Yb Kreise; diese sind die gesuchten.

Beweis. Ein um X mit Xb_1 beschriebener, zu dem gefundenen konzentrischer Kreis berührt nach dem Beweise von Aufgabe 87 den konzentrischen zu Kreis O in a_1, den konzentrischen zu Kreis Q in b_1 und geht durch P. Es ist daher:

$$Xa_1 = Xb_1 = PX \text{ (s. Erkl. 1).}$$

Nach Konstruktion ist aber:

$$aa_1 = bb_1 = cP.$$

Daher folgt durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten:

$$Xa = Xb = Xc.$$

Der Kreis X berührt also nach Erkl. 1 und 4 die drei gegebenen Kreise von aussen.

Für den Kreis Y ist ebenso nach Aufgabe 87:

$$Ya'_1 = Yb'_1 = YP \text{ u. nach Konstruktion}$$
$$a'a'_1 = b'b'_1 = c'P.$$

Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich:

$$Ya' = Yb' = Yc'.$$

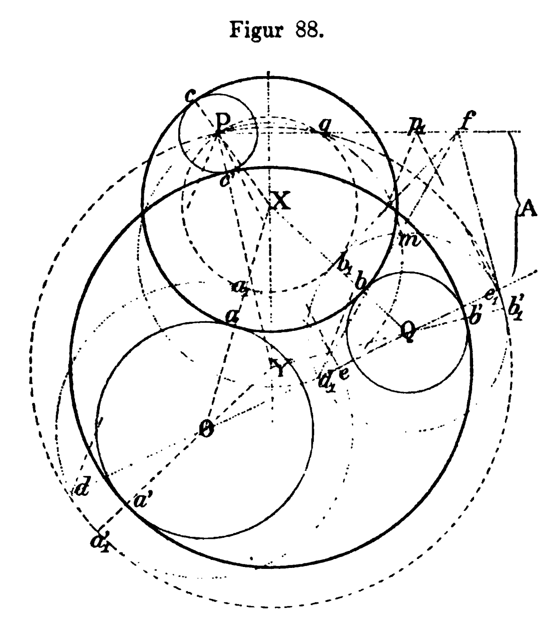
Kreis Y berührt also alle drei gegebenen Kreise umschliessend.

Anmerkung 23. Die Konstruktion von Kreis Y bei Fall I bleibt die gleiche in dem Falle, dass die Kreise Q und P innerhalb des Kreises O liegen und dort einander schneiden oder von aussen berühren oder auseinander liegen. Kreis Y berührt dann O von innen und umschliesst die Kreise Q und P.

II. Fall. Kreis O und Q sollen gleichartig, Kreis P ungleichartig berührt werden, also entweder O und Q von aussen, P umschliessend oder O und Q umschliessend, P von aussen (siehe Fig. 88).

Verlängere den Halbmesser r von Kreis O (Fig. 88) und den Halbmesser r_1 von Kreis Q je um den Halbmesser r_2 von Kreis Q und beschreibe mit den so verlängerten Halbmessern $r + r_1$ und $r_1 + r_2$ und um O und Q Kreise, welche zu den gegebenen konzentrisch sind und die Zentrale OQ innerhalb

Figur 88.



in den Punkten e und d_1, ausserhalb in den Punkten d und e_1 schneiden.

Nach Aufgabe 87 wäre nun zu diesen konzentrischen Kreisen der äussere Aehnlichkeitspunkt A zu suchen und mit P zu verbinden.

Da aber in der Zeichnung (Fig. 88) A in grosse Entfernung fällt, so ziehe dP und eP und durch d_1 und e_1 die Parallelen $d_1 p_1$ und $e_1 p_1$ und verbinde P mit p_1, so sind dP und $d_1 p_1$, ebenso eP und $e_1 p_1$ homologe Geraden (siehe Erkl. 57), also ihre Schnittpunkte P und p_1 homologe Punkte, folglich geht Pp_1 durch A.

Lege durch d_1, e und P einen Hilfskreis, welcher Pp_1 in q schneidet und errichte auf Pp das Mittellot.

Der Hilfskreis schneidet den konzentrischen Kreis um Q zum zweitenmale in m, ziehe $d_1 m$ bis zum Schnitt mit Pq in f, lege von f an den konzentrischen Kreis um Q die Tangenten fb_1 und fb'_1.

Ziehe Qb_1 und Qb'_1, welche das Mittellot von Pq in X und Y und den gegebenen Kreis Q in b und b' schneiden, und beschreibe um X mit Xb' um Y mit Yb' Kreise; diese sind die gesuchten.

Beweis. Beschreibe um X mit Xb_1, um Y mit Yb'_1 je einen Hilfskreis, so berühren dieselben nach Aufgabe 87 die konzentrischen Kreise um O und Q gleichartig und gehen durch P.

Es ist also nach Erkl. 1:

1). . . . . $Xa_1 = Xb_1 = XP$

2). . . . . $Ya'_1 = Yb'_1 = YP$,

aber nach Konstruktion:

3). . . . . $aa_1 = bb_1 = cP$

4). . . . . $a'a'_1 = b'r'_1 = c'P$.

Durch Addition von 1) und 3) und Subtraktion der Gleichung 4) von 3) erhält man:

$$Xa = Xb = Xc$$
$$Ya' = Yb' = Yc'.$$

Die gefundenen Kreise X und Y berühren daher die drei gegebenen Kreise.

Anmerkung 24. Die Konstruktion von Kreis X bleibt dieselbe, wenn Kreis P beide anderen Kreise schneidet. Kreis X berührt dann die Kreise O und Q von aussen, Kreis P von innen.

Die Konstruktion von Kreis Y bleibt dieselbe, wenn Kreis Q in Kreis O liegt und Kreis P entweder Kreis O schneidet oder ganz in Kreis O liegt, aber Kreis P nicht schneidet. Kreis Y berührt dann Kreis O von innen, Kreis Q umschliessend, Kreis P von aussen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

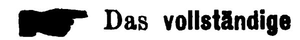
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

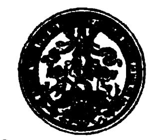
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

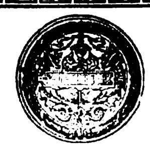
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

857. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 856. — Seite 81—96.
Mit 18 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 856. — Seite 81—96. Mit 18 Figuren.

Inhalt:

Die Hauptaufgaben des Berührungsproblems, gelöst durch Proportionen. — Aufgaben, welche mit dem apollonischen Berührungsproblem zusammenhängen, gelöst durch Proportionen und algebraische Analysis.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven** Zeichnens etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende **Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

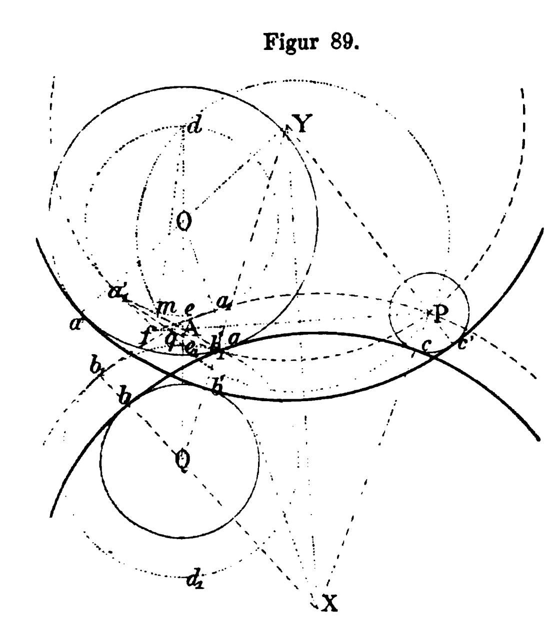
Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

III. Fall. Kreis O und Q sollen ungleichartig, Kreis P auf dieselbe Art wie Kreis O berührt werden.

Figur 89.



Verkürze den Halbmesser r des Kreises O (Fig. 89) und verlängere den Halbmesser r_1 des Kreises Q je um den Halbmesser r_2 des Kreises P und beschreibe um O mit dem verkürzten Halbmesser $r - r_2$, um Q mit dem verlängerten Halbmesser $r_1 + r_2$ Kreise, welche zu den gegebenen Kreisen O und Q konzentrisch sind und die Zentrale OQ ausserhalb in d und d_1, innerhalb in e und e_1 schneiden.

Suche den inneren Aehnlichkeitspunkt A der beiden konzentrischen Kreise und verbinde ihn mit P. Lege durch d, e_1, P einen Hilfskreis, welcher AP in q schneidet, und errichte auf Pq das Mittellot. Verbinde den zweiten Schnittpunkt m des Hilfskreises und des konzentrischen Kreises um O mit d, so schneidet dm die AP in f; lege von f an den konzentrischen Kreis um O die Tangenten fa_1 und fa'_1.

Ziehe Oa_1 und Oa'_1, welche das Mittellot von Pq in X und Y, den gegebenen Kreis O in a und a' schneiden; beschreibe um X mit Xa, um Y mit Ya' Kreise; diese sind die gesuchten.

Beweis. Beschreibe um X mit Xa_1 und um Y mit Ya'_1 Kreise, welche zu den gefundenen konzentrisch sind, so gehen dieselben nach Aufgabe 87 durch P und berühren den konzentrischen Kreis um Q in b_1, bezw. b'_1. Es ist also nach Erkl. 1:

1). . . . . $Xa_1 = Xb_1 = XP$

2). . . . . $Ya'_1 = Yb'_1 = YP$

aber nach Konstruktion:

3). . . . . $aa_1 = bb_1 = cP$

4). . . . . $a'a'_1 = b'b'_1 = c'P$

Subtrahiert man 3) von 1) und addiert man 4) zu 2), so erhält man:

$$Xa = Yb = Xc$$

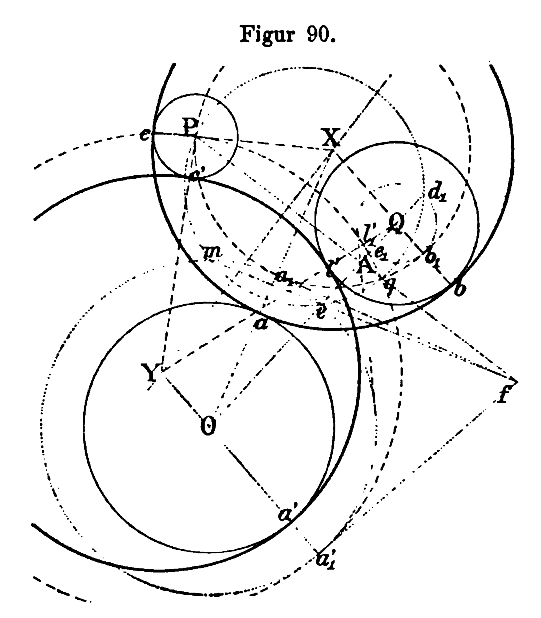
$$Ya' = Yb' = Yc',$$

also berühren die Kreise X und Y die gegebenen.

Anmerkung 25. Die Konstruktion des Kreises X bleibt dieselbe, wenn Kreis Q die beiden Kreise O und P schneidet und diese selbst auseinander liegen oder einander schneiden, oder wenn Kreis Q den Kreis P einschliesst und den Kreis O schneidet, Kreis P aber nicht ganz in Kreis O liegt. Kreis X berührt dann O und P von aussen, Q von innen.

Die Konstruktion von Kreis Y bleibt dieselbe, wenn Kreis P in O liegt und Kreis Q den Kreis O schneidet, oder in Kreis O liegt, aber Kreis P nicht schneidet. Kreis Y berührt dann O von innen, P umschliessend, O von aussen.

Figur 90.



IV. Fall. Kreis O und Q sollen ungleichartig berührt werden, Kreis P auf gleiche Art wie Kreis Q.

Die **Konstruktion** ist wörtlich dieselbe wie bei Fall III, nur dass um O ein Kreis mit dem verlängerten Halbmesser $r + r_2$, um Q mit dem verkürzten Halbmesser $r_1 - r_2$ zu beschreiben ist, und dass der Hilfskreis der Bequemlichkeit wegen durch e, d_1, P gelegt wurde.

Beim **Beweis** erhält man die beiden Schlussgleichungen, wenn man 3) zu 1) addiert, 4) von 2) subtrahiert.

Anmerkung 26. Die Konstruktion von Kreis X bleibt dieselbe, wenn Kreis P in Kreis Q, aber ausserhalb Kreis O liegt und Kreis Q den Kreis O schneidet, dann berührt Kreis X den Kreis O von aussen, Q von innen, P umschliessend; oder wenn alle drei Kreise einander so schneiden, dass Kreis O durch das gemeinsame Gebiet von Q und P geht, dann wird Kreis O von aussen, Q und P von innen berührt.

Die Konstruktion von Kreis Y bleibt dieselbe, wenn die Kreise P und Q den Kreis O schneiden oder in demselben liegen, aber P nicht ganz in Q liegt; dann berührt Kreis Y den Kreis O von innen, Q und P von aussen.

Determination. In der Analysis wurde schon bewiesen, dass es höchstens acht Berührungskreise gibt.

Dies ist der Fall, wenn entweder alle drei Kreise auseinander liegen, oder alle drei einander schneiden, oder wenn die beiden kleineren ganz auseinander liegen und vom grössten eingeschlossen werden.

Keine Lösung gibt es, wenn der kleinste Kreis im mittleren und dieser im grössten liegt, oder wenn einer der kleineren innerhalb, der andere ausserhalb des grösseren liegt, oder wenn die drei Kreise durch die nämlichen zwei Punkte gehen.

Unzählige Lösungen gibt es, wenn alle drei Kreise einander in einem Punkte berühren.

Die Zahl der sonst möglichen Lösungen wird um eine verringert durch jede Tangente, welche alle drei Kreise gemeinsam haben. Durch jede Berührung zwischen

zweien der gegebenen Kreise **fallen** von den sonst möglichen Lösungen **zwei weg**, also kann es in einem solchen Fall **höchstens sechs** Lösungen geben. Sind aber durch andere Umstände schon einige Berührungskreise fortgefallen, so ist besonders zu untersuchen, ob eine Berührung auf diese oder auf die noch übrigen Lösungen Einfluss hat.

Eine vollständige Diskussion aller möglichen Fälle ist bei der grossen Zahl von verschiedenen Lagen dreier Kreise gegen einander sehr weitläufig, man erhält jedoch für jede bestimmte Lage der gegebenen Kreise die Zahl der Lösungen, wenn man die Determination von Aufgabe 87 auf jeden der vier Fälle der Konstruktion anwendet.

D. Aufgaben, welche mit dem Apollonischen Problem zusammenhängen, gelöst durch Proportionen und algebraische Analysis.

Aufgabe 94. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 91.

Analysis I. Der gesuchte Kreis (Fig. 91) schneide den Kreis O in a, Kreis Q in a_1, so ist:

$$\sphericalangle\, \mathrm{O}a\mathrm{X} = \sphericalangle\, \mathrm{Q}a_1\mathrm{X} = 90^0,$$

daher sind Oa und Qa_1 Tangenten an Kreis X. PO schneide den gesuchten Kreis in q, PQ in q_1, so ist nach dem Tangentensatz (siehe Erkl. 13):

1\) . . . . $\mathrm{OP}.\mathrm{O}q = \overline{\mathrm{O}a}^2$

2\) . . . . $\mathrm{QP}.\mathrm{Q}q_1 = \overline{\mathrm{O}b}^2$.

Es lassen sich daher Oq und Qq_1 als dritte Proportionalen zu OP und Oa bezw. QP und Qa_1 konstruieren. Als geometrische Oerter für X bekommt man dann die Mittellote auf Pq und Pq_1.

Die Auffindung von Oq und Qq_1 kann mit Hilfe des Kathetensatzes geschehen, wenn man über OP und QP Halbkreise beschreibt, welche die gegebenen Kreise in b bezw. b_1 schneiden, und von b bezw. b_1 die Senkrechten bq bezw. bq_1 auf OP und QP fällt.

Erkl. 66. Da die Lage von Punkt q nur von PO und dem Halbmesser des Kreises O, nicht aber von Lage und Grösse des gesuchten Kreises abhängt, erhält man folgenden Lehrsatz:

Alle Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden, gehen durch einen zweiten Punkt auf der Zentrale des gegebenen.

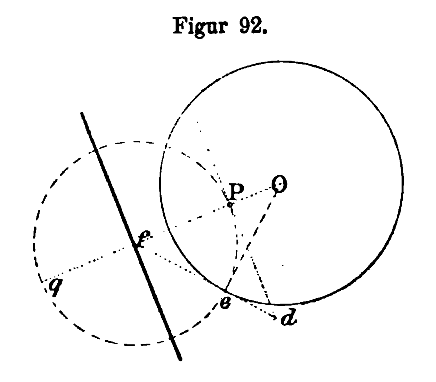
Erkl. 67. Ein bekannter Satz der Planimetrie lautet:

Zieht man durch die Mitte einer Seite eines Dreiecks die Parallele zu einer zweiten Seite, so wird durch diese die dritte Seite halbiert, und das in das Dreieck fallende Stück der Parallelen ist gleich der halben Seite.

Eine Umkehrung dieses Satzes lautet:

Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Seiten eines Dreiecks ist parallel der dritten Seite und halb so gross als diese.

Figur 92.



(S. Erkl. 26.) Der Lehrsatz des *Pythagoras* lautet:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Erkl. 68. Aus den nebenstehenden Gleichungen ergeben sich folgende Lehrsätze:

a). Der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks von gegebener Grundlinie, in welchem die Differenz der Quadrate der

Denn nach Erkl. 50 ist Dreieck PbQ bei b rechtwinklig und bq Höhe darin, also:

$$\overline{Ob}^2 = \overline{Oa}^2 = OP\,.\,Oq \text{ (Erkl. 49).}$$

Das Mittellot von Pq ist parallel mit bq, halbiert daher nach einem bekannten Satze der Planimetrie die Seite Pb des Dreiecks Pbq. Diese ist aber nach Erkl. 50 Tangente an den Kreis O. Man kann daher die beiden geometrischen Oerter für den Mittelpunkt X des gesuchten Kreises auch direkt finden, ohne die Punkte q und q_1 bestimmen zu müssen. Doch gilt dies nur für den Fall, wo Punkt P ausserhalb der Kreise O und Q liegt.

Liegt dagegen Punkt P innerhalb eines der beiden Kreise, z. B. innerhalb Kreis O (Fig. 92), so lässt sich die Konstruktion des geometrischen Orts ohne Zuhilfenahme des Punktes q auf folgende Weise erreichen: Man errichte auf OP in P das Lot Pd gleich dem Halbmesser von Kreis O, lege von d an Kreis O die Tangente, welche OP in f schneidet, und ziehe durch f die Senkrechte zu Of, so ist diese der gesuchte geometrische Ort. Denn wenn e der Berührungspunkt von df mit Kreis O ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke Ofe und dfP kongruent, da $Pd = Oe$ und die Winkel bei f dieselben sind: also ist $fe = fP$, ein Kreis um f mit fP schneidet daher den Kreis O rechtwinklig in e; schneidet ersterer die OP in q, so ist nach dem Tangentensatze:

$$\overline{Oe}^2 = OP\,.\,Oq$$

und nach Erkl. 1: f Mitte von Pq.

Analysis II. In Figur 91 werde XP, XO, XQ gezogen, so ist nach dem Lehrsatze des *Pythagoras* (siehe Erkl. 26) in den Dreiecken XOa und XQa_1:

$$\overline{XO}^2 - \overline{Xa}^2 = \overline{Oa}^2$$
$$\overline{XQ}^2 - \overline{Xa_1}^2 = \overline{Qa_1}^2$$

oder wenn man $Oa = r$, $Qa_1 = r_1$ setzt:

$$1).\ \ldots\ \overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 = r^2$$
$$2).\ \ldots\ QX^2 - \overline{PX}^2 = r_1^2.$$

Denkt man sich von X auf PO und PQ die Senkrechten Qf und Qf_1 gefällt, so ist:

$$\overline{OX}^2 = \overline{Of}^2 + \overline{fX}^2$$
$$\overline{PX}^2 = \overline{Pf}^2 + \overline{fX}^2 = \overline{Pf_1}^2 + \overline{f_1X}^2$$
$$QX^2 = \overline{Qf_1}^2 + \overline{f_1X}^2;$$

daher ist:

Seiten gegeben ist, besteht aus einer festen zur Grundlinie senkrechten Geraden.

b). Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden, ist eine feste, zur Zentrale des Punktes senkrechte Gerade.

3). . . $\overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 = \overline{Of}^2 - \overline{Pf}^2 = r^2$

4). . . $\overline{QX}^2 - \overline{PX}^2 = \overline{Qf_1}^2 - \overline{Pf_1}^2 = r_1^2$

Die Punkte f und f_1 sind daher unabhängig von der Grösse des gesuchten Halbmessers und lassen sich finden, wenn man PO und PQ so teilt, dass der Unterschied der Quadrate der Abschnitte gleich dem Quadrate des Halbmessers wird.

Die Senkrechten auf PO und PQ in f und f_1 sind daher geometrische Oerter für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Erkl. 69. Der in Erkl. 68 erwähnte geometrische Ort heisst Potenzlinie des gegebenen Punkts und des gegebenen Kreises. Denn sieht man den gegebenen Punkt als unendlich kleinen Kreis an, so sind die Potenzen jedes Punktes dieser Linie für den Kreis O und den Kreis P einander gleich.

Beweis. l sei irgend ein Punkt des auf OP in f errichteten Lots und nach Voraussetzung:

1). . . . . . $\overline{Of}^2 - \overline{Pf}^2 = r^2$,

so ist:

$$\overline{Ol}^2 = \overline{Of}^2 + \overline{fl}^2$$

$$\overline{Pl}^2 = \overline{Pf}^2 + \overline{fl}^2,$$

daher:

2). . . . . . $\overline{Ol}^2 = \overline{Pl}^2 = r^2$.

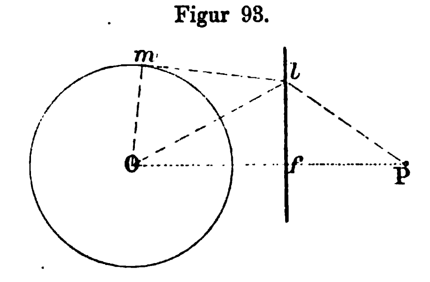
Zieht man von l an Kreis O die Tangente lm, so ist in dem Dreieck Olm nach dem Lehrsatze des *Pythagoras*:

3). . . . . . $\overline{Ol}^2 - \overline{lm}^2 = r^2$,

woraus sich $lm = Pl$ ergibt.

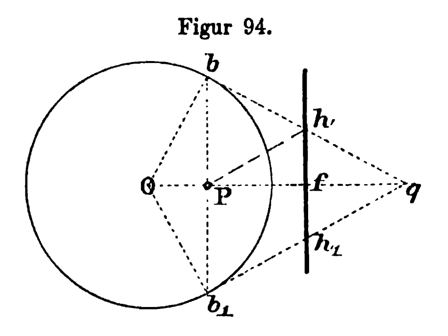
Aber nach Erkl. 43 nennt man $\overline{lm}^2$ die Potenz von lm in Bezug auf Kreis O, $l\mathrm{P}^2$ die Potenz in Bezug auf den unendlich kleinen Kreis P, diese Potenzen sind somit einander gleich.

Figur 93.



Erkl. 70. Die Potenzlinie zwischen einem Punkt und einem Kreis kann entweder auf die in der Analysis angeführte Art konstruiert werden, nämlich: wenn der Punkt ausserhalb des Kreises liegt, als Senkrechte auf die Zentrale des Punkts durch die Mitte der von dem Punkte an den Kreis gelegten Tangente; oder wenn der Punkt im Kreis liegt, indem man durch den Punkt die zu seiner Zentrale senkrechte Sehne zieht, in deren Endpunkten die Tangenten an den Kreis legt und deren Mitten verbindet (siehe Fig. 94); oder durch die in Figur 92 an-

Figur 94.

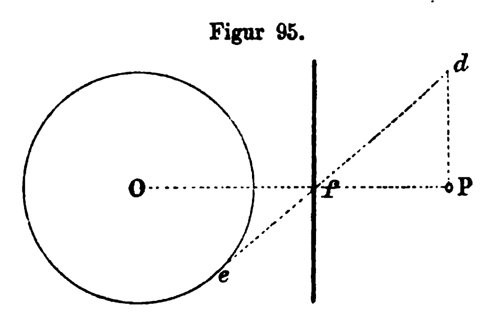


gegebene Konstruktion, welche sich auch wörtlich auf den Fall anwenden lässt, wo der Punkt ausserhalb des Kreises liegt (siehe Fig. 95); oder endlich, gleichgültig, wo der Punkt liegt, indem man (Fig. 96 und 97) in dem Punkt P auf der Zentrale eine Senkrechte errichtet, um einen beliebigen Punkt *i* dieser Senkrechten einen Kreis mit Halbmesser *i*P beschreibt, welcher den gegebenen Kreis in *m* und *n* schneidet. Trifft dann Sehne *mn* die Zentrale OP in *f*, so ist das Lot auf O*f* in *f* die verlangte Potenzlinie, denn nach dem Tangentensatze, angewendet auf den Hilfskreis, ist:

$$\overline{f\mathrm{P}}^2 = fm.\ fn.$$

Die Grösse links ist die Potenz von *f* in Bezug auf Punkt P, die Grösse rechts die Potenz von *f* in Bezug auf den gegebenen Kreis.

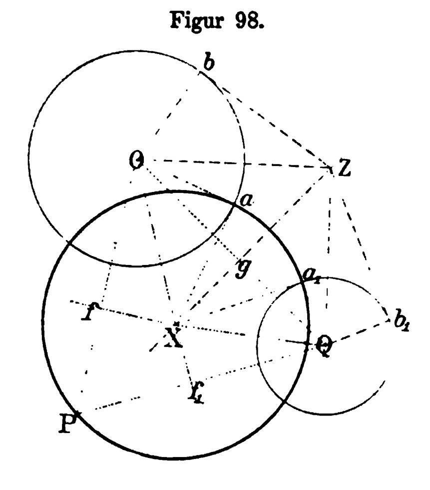
Figur 95.



Figur 96.

Figur 97.

Figur 98.



Konstruktion. Zeichne nach Erkl. 70 die Potenzlinien zwischen Punkt P und jedem der beiden Kreise O und Q. Diese Potenzlinien schneiden einander in X, beschreibe um X mit XP einen Kreis, so ist dieser der gesuchte (Fig. 98).

Beweis. Es seien a und a_1 je einer der Schnittpunkte des Kreises X mit den Kreisen O und Q; ziehe Xa, Xa_1, Oa, Qa_1, so ist zu beweisen, dass die Winkel OaX und Qa_1X rechte Winkel sind. Nun ist nach Konstruktion X ein Punkt der Potenzlinie zwischen P und Kreis O, sowie ein Punkt der Potenzlinie zwischen P und Kreis Q, daher ist nach Erkl. 69 und 70:

1). . . . $\overline{XO}^2 - \overline{XP}^2 = r^2$

2). . . . $\overline{XQ}^2 - \overline{XP}^2 = r_1^2$,

aber $XP = Xa = Xa_1$ (Erkl. 1), also:

$$\overline{XO}^2 - \overline{Xa}^2 = r^2 = \overline{Oa}^2$$

$$\overline{XQ}^2 - \overline{Xa_1}^2 = r_1^2 = \overline{Qa_1}^2,$$

folglich sind nach der Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes die Dreiecke OaX und Qa_1X bei a bezw. a_1 rechtwinklig.

Erkl. 71. Die Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes lautet:

Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Determination. Es gibt nur eine Lösung.

Die Auflösung wird unmöglich, wenn der Punkt P in die Zentrale OQ der beiden Kreise fällt, oder die Kreise konzentrisch sind, weil dann beide Potenzlinien auf OQ senkrecht stehen, also einander nicht schneiden. Wenn jedoch in diesem Falle die beiden Potenzlinien in eine Gerade zusammenfallen, so erfüllt jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinsamen Potenzlinie liegt, und der durch P geht, die Forderung der Aufgabe.

Der Punkt P muss jedoch in diesem Falle eine ganz bestimmte Lage haben (siehe weiter unten: Erkl. 74).

Anmerkung 27. Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) des Beweises folgt durch Subtraktion:

1). . . . . $\overline{XO}^2 - \overline{XQ}^2 = r^2 - r_1^2$.

Fällt man (Fig. 98) von X auf OQ die Senkrechte, welche OQ in g schneidet, so ist:

$$\overline{OX}^2 = \overline{Og}^2 + \overline{Xg}^2 \text{ und } \overline{QX}^2 = \overline{Qg}^2 + \overline{Xg}^2 \text{ (Erkl. 26).}$$

Setzt man diese Gleichungen in Gleichung 1) ein, so erhält man:

2). . . . . $\overline{Og}^2 - \overline{Qg}^2 = r^2 - r_1^2$.

Daraus folgt, dass Punkt g ein von dem Kreise X unabhängiger fester Punkt von OQ ist, und man erhält daher den in Erkl. 72 ausgesprochenen Satz und zugleich eine Probelinie für die Konstruktion des in Aufgabe 94 gesuchten Kreises.

Erkl. 72. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, ist eine feste auf der Zentrale beider gegebenen Kreise senkrechte Gerade.

Man nennt diese Gerade die Potenzlinie beider Kreise, weil jeder Punkt derselben gleiche Potenz in Bezug auf jeden der beiden Kreise hat.

Beweis. Zieht man (Fig. 98) von einem beliebigen Punkte Z der Potenzlinie die Tangenten Zb und Zb_1 an beide Kreise, so ist nach Anmerkung 27:

$$\overline{OZ}^2 - \overline{QZ}^2 = r^2 - r_1^2,$$

oder:

$$\overline{OZ}^2 - r^2 = \overline{QZ}^2 - r_1^2,$$

aber in den rechtwinkligen Dreiecken OZb und QZb_1 ist nach dem Pythagoräer:

$$\overline{OZ}^2 - r^2 = \overline{Zb}^2, \quad \overline{QZ}^2 - r_1^2 = Zb_1^2,$$

daher ist:

$$\overline{Zb}^2 = Zb_1^2,$$

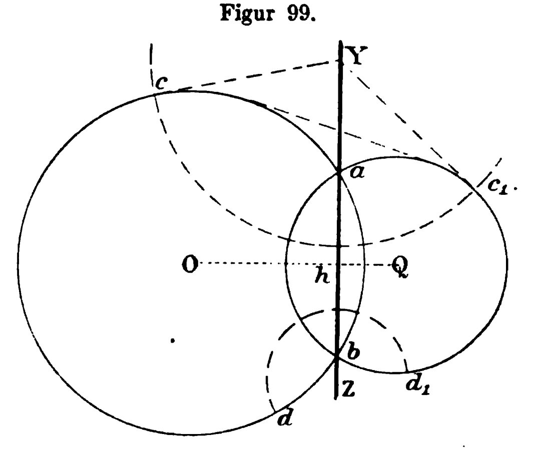
oder die Potenzen von Z für jeden der beiden Kreise sind einander gleich.

Anmerkung 28. Die Potenzlinie zweier Kreise lässt sich auf verschiedene Weise konstruieren:

1). bei zwei einander schneidenden Kreisen (Fig. 99) ist die gemeinsame Sehne (Chorde) Potenzlinie, weshalb letztere auch Chordale genannt wird.

Denn sei Y ein Punkt der gemeinsamen Sehne ab ausserhalb der beiden Kreise, so ist $Ya \cdot Yb$ die Potenz des Punktes Y für jeden der zwei Kreise, sowie für jeden weiteren durch a und b gehenden Kreis. Legt man von Y an Kreis O und Q die Tangenten Yc und Yc_1, so ist $\overline{Yc}^2 = \overline{Yc_1}^2 = Ya \cdot Yb$ (Erkl. 43). Daher $Yc = Yc_1$, und ein um Y mit Yc beschriebener Kreis schneidet Kreis O und Kreis Q und jeden durch a und b gehenden Kreis rechtwinklig. Ist h die Mitte von ab, so ist:

Figur 99.



$$1)\ldots\ Ya \cdot Yb = (Yh + \tfrac{1}{2}ab)(Yh - \tfrac{1}{2}ab) = \overline{Yh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{ab}^2 = \overline{Yc}^2,$$

es ist also $Yc < Yh$, der Kreis um Y mit Yc schneidet folglich die Zentrale OQ nicht.

2). Für einen weiteren Kreis mit dem Mittelpunkt Z auf ab, welcher beide Kreise O und Q rechtwinklig schneidet, ist ebenso:

$$Zd < Zh,$$

folglich schneiden die Kreise Y und Z einander nicht, wenn Y und Z auf verschiedenen Seiten von OQ liegen, weil dann ihre Zentrale grösser als die Summe der Halbmesser ist.

Liegt aber Z mit Y auf der gleichen Seite von OQ, so ist:

$$YZ = Yh - Zh.$$

Ferner ist:

$$\overline{Zd}^2 = \overline{Zh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{ab}^2; \quad \overline{Yc}^2 = \overline{Yh}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{ab}^2,$$

daher:

$$\overline{Yh}^2 - \overline{Zh}^2 = \overline{Yc}^2 - \overline{Zd}^2 \quad \text{oder} \quad (Yh - Zh)(Yh + Zh) = (Yc - Zd)(Yc + Zd)$$

oder:

$$Yh - Zh = YZ = (Yc - Zd) \cdot \frac{Yc + Zd}{Yh + Zh}.$$

Da nun $Yc < Yh$, $Zd < Zh$, so ist $Yc + Zd < Yh + Zh$, oder der Bruch rechts ein echter Bruch, folglich ist $YZ < Yc - Yd$ oder als die Differenz der Halbmesser. Die Kreise Y und Z schneiden daher einander in keinem Falle.

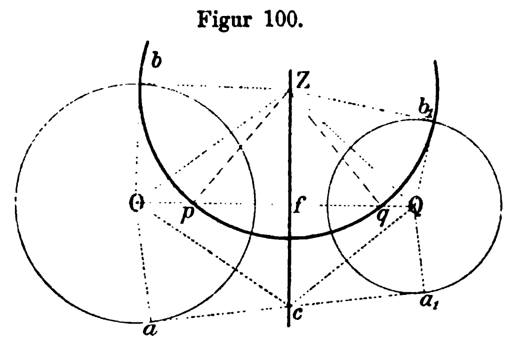
Man erhält daraus folgende wichtigen Sätze:

Erkl. 73. Jeder Kreis, welcher zwei einander schneidende Kreise rechtwinklig schneidet, schneidet auch jeden anderen Kreis rechtwinklig, welcher durch die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kreise geht.

Erkl. 74. Die Kreise, welche zwei einander schneidende Kreise rechtwinklig schneiden, schneiden einander und die Zentrale der gegebenen Kreise nicht.

Anmerkung 29. 3). Wenn die zwei gegebenen Kreise auseinander liegen, so erhält man ihre Potenzlinie (Fig. 100), wenn man durch die Mitte einer gemeinsamen Tangente die Senkrechte zur Zentrale zieht.

Figur 100.



Beweis. Nach Konstruktion ist $ca = ca_1$, daher die Potenzen von c in Bezug auf beide Kreise einander gleich;

$$\overline{Oc}^2 - \overline{Qc}^2 = (\overline{ca}^2 + r^2) - (\overline{ca_1}^2 + r_1^2) = r^2 - r_1^2,$$

$$\overline{Of}^2 - \overline{Qf}^2 = (\overline{Oc}^2 - \overline{cf}^2) - (\overline{Qc}^2 - \overline{cf}^2) = \overline{Oc}^2 - \overline{Qc}^2 = r^2 - r_1^2.$$

Ist Z irgend ein Punkt von cf, und Zb und Zb_1 die Tangenten von Z an O und Q, so ist:

$$\overline{OZ}^2 - \overline{QZ}^2 = (\overline{Of}^2 + \overline{Zf}^2) - (\overline{Qf}^2 + \overline{Zf}^2) = \overline{Of}^2 - \overline{Qf}^2 = r^2 - r_1^2$$

oder:

$$\overline{OZ}^2 - r^2 = \overline{QZ}^2 - r_1$$

oder:

$$\overline{Zb}^2 = \overline{Zb_1}^2,$$

d. h.:

$$Zb = Zb_1.$$

Ein um Z mit Zb beschriebener Kreis schneidet also beide gegebene Kreise rechtwinklig.

Ferner ist $\overline{Zb}^2 = \overline{OZ}^2 - r^2$, aber $Of > r$, daher $\overline{Zb}^2 > \overline{OZ}^2 - \overline{Of}^2$ oder $\overline{Zb}^2 > \overline{Zf}^2$, $Zb > Zf$, der Kreis um Z mit Zb schneidet also die Zentrale (siehe Erkl. 25) in zwei gegen f symmetrisch gelegenen Punkten p und q (Erkl. 15). Um die Lage dieser Punkte zu bestimmen, ziehe Zp, so ist:

$$\overline{pf}^2 = \overline{qf}^2 = \overline{Zp}^2 - \overline{Zf}^2 = \overline{OZ}^2 - r^2 - \overline{Zf}^2,$$

aber:

$$\overline{OZ}^2 - \overline{Zf}^2 = \overline{Of}^2,$$

folglich:

$$\overline{pf}^2 = \overline{qf}^2 = \overline{Of}^2 - r^2.$$

Da nun die Lage von f konstant ist, so ist auch $pf = qf$ konstant, und jeder Kreis, welcher die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet, geht durch p und q.

---

4). Wenn einer der beiden Kreise im andern liegt, so ziehe einen beliebigen Kreis, welcher Kreis O in m und n, Kreis Q in h und i schneidet,

und fälle vom Durchschnittspunkt l der Sehnen mn und hi auf die Zentrale OQ die Senkrechte, so ist diese die Potenzlinie.

Figur 101.

Beweis. $lm.ln$ ist nach Erkl. 43 Potenz des Punkts l in Bezug auf Kreis O, ebenso $lh.li$ die Potenz von l in Bezug auf Kreis Q; nach dem Sekantensatz, angewendet auf den Hilfskreis, ist aber $lm.ln = lh.li$, folglich sind die Potenzen von l in Bezug auf beide Kreise einander gleich, oder:

$$\overline{lO}^2 - r^2 = \overline{lQ}^2 - r_1^2,$$

oder:

$$\overline{lf}^2 + \overline{fO}^2 - r^2 = \overline{lf}^2 + \overline{fQ}^2 - r_1^2,$$

oder:

$$\overline{fO}^2 - r^2 = \overline{fQ}^2 - r_1^2, \quad \overline{fO}^2 - \overline{fQ}^2 = r^2 - r_1^2.$$

Von irgend einem Punkt Z seien die Tangenten Zb und Zb_1 an beide Kreise gezogen, so ist

$$\overline{ZO}^2 - r^2 = \overline{Zf}^2 + \overline{fO}^2 - r^2 = \overline{Zf}^2 + \overline{Qf}^2 - r_1^2 = \overline{ZQ}^2 - r_1^2,$$

aber:

$$\overline{ZO}^2 - r^2 = \overline{Zb}^2, \quad \overline{ZQ}^2 - r_1^2 = \overline{Zb_1}^2,$$

daher:

$$Zb = Zb_1,$$

ein um Z mit Zb beschriebener Kreis schneidet die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig.

Es ist $\overline{Zb}^2 = \overline{ZO}^2 - r^2$, aber $Of > r$, daher $\overline{Zb}^2 > \overline{ZO}^2 - \overline{Of}^2$ oder $\overline{Zb}^2 > \overline{Zf}^2$, $Zb > Zf$, d. h. der Kreis um Z schneidet die Zentrale in p und q, welche gegen f symmetrisch liegen. Es ergibt sich wie bei 2), dass die Lage der Punkte p und q konstant ist, und man erhält daher den Lehrsatz:

Erkl. 75. Alle Kreise, welche zwei einander nicht schneidende Kreise rechtwinklig schneiden, gehen durch zwei feste Punkte der Zentrale jener beiden Kreise.

Anmerkung 30. Die in Anmerkung 29, 4) gezeigte, in Fig. 101 dargestellte Konstruktion der Potenzlinie ist für alle Lagen beider Kreise gegen einander anwendbar.

Aufgabe 95. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise halbiert.

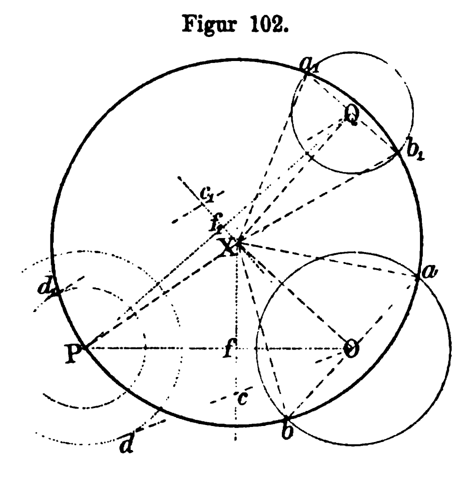
Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Der gesuchte Kreis X (Fig. 102) schneide die Kreise O und Q nach den Durchmessern ab und a_1b_1; dann sind XOa und XQa_1 rechtwinklige Dreiecke. Es sei der Halbmesser von Kreis $O = r$, der von Kreis $Q = r_1$, dann ist nach dem Pythagoräer:

$$\overline{OX}^2 = \overline{aX}^2 - r^2 = \overline{PX}^2 - r^2$$

$$\overline{QX}^2 = \overline{a_1X}^2 - r_1^2 = \overline{PX}^2 - r_1^2,$$

Figur 102.

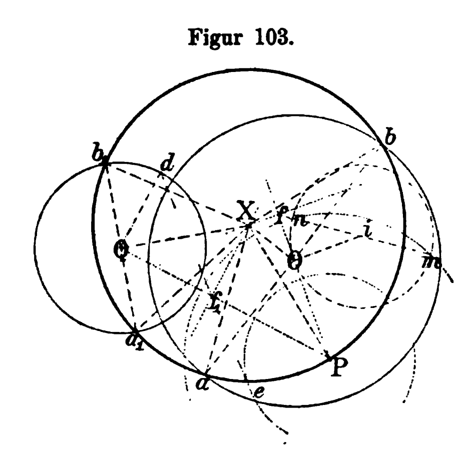


Erkl. 76. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis halbieren, ist eine feste zur Zentrale des Punktes senkrechte Gerade.

Man erhält dieselbe als Potenzlinie zwischen dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises und einem Hilfskreis um den gegebenen Punkt mit dem gegebenen Halbmesser.

Sie liegt daher gegen die Potenzlinie zwischen dem gegebenen Punkt und dem gegebenen Kreis symmetrisch gegen das Mittellot der Zentrale des gegebenen Punktes als Axe.

Figur 103.



(S. Erkl. 69.) Die Potenzlinie zwischen einem Punkt P und einem Kreis O ist der geometrische Ort für alle Punkte X, für welche:

$$\overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 = r^2 \text{ ist.}$$

daher:

1). . . . . . $\overline{PX}^2 - \overline{OX}^2 = r^2$

2). . . . . . $\overline{PX}^2 - \overline{QX}^2 = r_1^2$.

Diese Gleichungen haben fast die gleiche Form wie die Gleichungen 3) und 4) in der Analysis von Aufgabe 94, mit dem Unterschiede, dass hier Minuend und Subtrahend vertauscht sind, d. h. also: denkt man sich um P einen Kreis mit dem Halbmesser r beschrieben und die Potenzlinie zwischen Punkt O und diesem Hilfskreis konstruiert, so entspricht dieselbe der Gleichung 1); denkt man sich ferner um P mit r_1 einen zweiten Hilfskreis beschrieben und die Potenzlinie zwischen diesem und Punkt Q gesucht, so genügt jeder Punkt X derselben der Gleichung 2).

Damit sind zwei geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt gefunden.

Konstruktion. Beschreibe (Figur 102 und 103) um P zwei Hilfskreise mit den Halbmessern von Kreis O und Q (der erstere werde als grösser vorausgesetzt). Ziehe die Potenzlinie zwischen Punkt O und dem grösseren, sowie diejenige zwischen Punkt Q und dem kleineren Hilfskreis. Beide Hilfspotenzlinien schneiden einander in X, beschreibe um X einen Kreis mit Halbmesser XP, dieser ist der gesuchte. (Die Konstruktion der Potenzlinie ist in Figur 102 durch Halbieren der Tangente, in Figur 103 bei Punkt O nach Figur 95, bei Punkt Q nach Figur 96 ausgeführt.)

Beweis. Kreis X schneide Kreis O in a und b, ziehe Xa, Xb, Oa, Ob, XO.

Da X ein Punkt der Potenzlinie zwischen Punkt O und dem Hilfskreis um P mit Halbmesser r ist, so ist nach Erkl. 69:

1). . . . . $\overline{XP}^2 - \overline{XO}^2 = r^2$

aber nach Erkl. 1 ist Xa = Xb = XP, daher:

2). . . . . $\overline{Xa}^2 - \overline{XO}^2 = r^2 = \overline{Oa}^2$

3). . . . . $\overline{Xb}^2 - \overline{XO}^2 = r^2 = \overline{Ob}^2$

also sind nach der Umkehrung des Pythagoräers (siehe Erkl. 71) die Dreiecke XOa und XOb bei O rechtwinklig, also Winkel $aOb = 180^{0}$, daher ab Durchmesser von Kreis O.

Analog ist der Beweis für Kreis Q.

Determination. Es gibt nur einen Kreis, welcher der Aufgabe genügt.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die beiden Hilfspotenzlinien parallel werden, d. h. wenn P auf der Zentrale OQ liegt, oder wenn die Kreise O und Q konzentrisch sind.

Wenn jedoch beide Hilfspotenzlinien in eine zusammenfallen, so ist jeder Punkt derselben Mittelpunkt eines Kreises, welcher Kreis O und Kreis Q halbiert. In diesem Falle muss jedoch p eine ganz bestimmte Lage haben.

Anmerkung 31. Aus den beiden Gleichungen 1) und 2) der Analysis folgt:

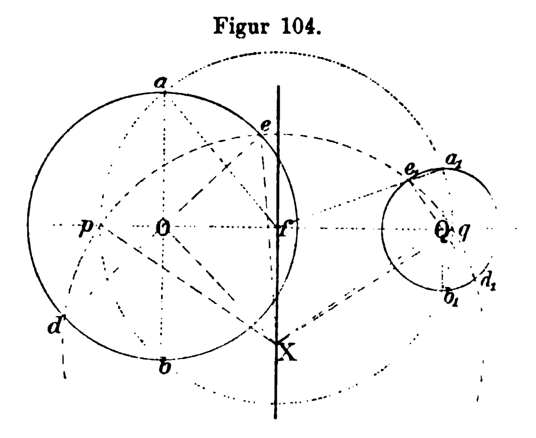
$$1). \quad \overline{QX}^2 - \overline{OX}^2 = r^2 - r_1^2.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Gleichung 1 von Anmerkung 27, mit dem Unterschied, dass links die Punkte O und Q vertauscht sind. Es liegt daher X auf der Potenzlinie derjenigen Hilfskreise, welche um jeden Mittelpunkt mit dem Halbmesser des andern Kreises beschrieben sind. Daraus bekommt man eine Probelinie für die Konstruktion und den in Erkl. 77 ausgesprochenen Satz:

Erkl. 77. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise halbieren (nach dem Durchmesser schneiden), ist eine feste, auf der Zentrale der gegebenen Kreise senkrechte Gerade. Sie liegt symmetrisch gegen die Potenzlinie beider Kreise für das Mittellot der Zentrale als Axe.

Anmerkung 32. Man kann den in Erkl. 77 erwähnten geometrischen Ort noch auf andere Weise erhalten: Ziehe die beiden zu OQ senkrechten Durchmesser: ab durch O, a_1b_1 durch Q, und lege durch a und a_1 einen Kreis, dessen Mittelpunkt f in OQ fällt, so geht derselbe nach Erkl. 15 auch durch b und b_1, schneidet also beide Kreise nach dem Durchmesser, und f ist Schnittpunkt des gesuchten geometrischen Orts mit OQ. Die Senkrechte auf OQ durch f ist daher der gesuchte geometrische Ort.

Figur 104.



Anmerkung 33. Der in Anmerkung 32 erwähnte Kreis um f (Fig. 104) schneide die Zentrale OQ in den Punkten p und q; irgend ein anderer Kreis, dessen Mittelpunkt X auf dem gesuchten geometrischen Ort liegt, schneide Kreis O nach dem Durchmesser $d\,e$, Kreis Q nach dem Durchmesser $d_1\,e_1$, so ist nach dem Pythagoräer im Dreieck OdX:

$$\overline{Xd}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{Od}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{Oa}^2,$$

aber im Dreieck OfX ist:

$$\overline{OX}^2 = \overline{Of}^2 + \overline{Xf}^2,$$

und im Dreieck Oaf:

$$\overline{Oa}^2 = \overline{af}^2 - \overline{Of}^2 = \overline{fp}^2 - \overline{Of}^2;$$

daher ist:

$$\overline{Xd}^2 = \overline{Of}^2 + \overline{Xf}^2 + \overline{fp}^2 - \overline{Of}^2$$
$$= \overline{Xf}^2 + \overline{fp}^2.$$

Zieht man Xp, so gibt das rechtwinklige Dreieck Xfp:

$$\overline{Xp}^2 = \overline{Xf}^2 + \overline{fp}^2,$$

es ist somit:

$$Xd = Xp,$$

d. h. der Kreis um X geht durch p, also auch durch q nach Erkl. 15.

Erkl. 78. Alle Kreise, welche zwei gegebene Kreise gleichzeitig halbieren, gehen durch zwei feste Punkte auf der Zentrale der gegebenen Kreise.

Aufgabe 96. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und von zwei gegebenen Kreisen halbiert wird.

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Der gesuchte Kreis X (Fig. 105) werde von Kreis O nach dem Durchmesser ab, von Kreis Q nach dem Durchmesser $a_1\,b_1$ geschnitten.

Man ziehe Oa, OX, Qa_1, QX, PX, PO, PQ, so sind die Dreiecke OaX und Qa_1X als die Hälften von gleichschenkligen Dreiecken rechtwinklig; es ist daher nach dem Lehrsatze des *Pythagoras*:

$$\overline{OX}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{Xa}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{XP}^2$$
$$\overline{QX}^2 = \overline{Qa_1}^2 - \overline{Xa_1}^2 = \overline{Qa_1}^2 - \overline{XP}^2$$

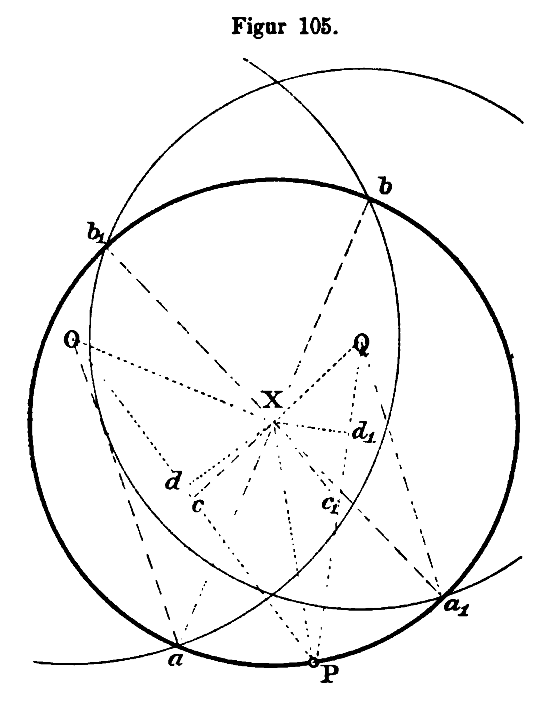
oder wenn man den Halbmesser des Kreises O mit r, den von Kreis Q mit r_1 bezeichnet:

1). . . . $\overline{XP}^2 + \overline{OX}^2 = r^2$

2). . . . $\overline{XP}^2 + QX^2 = r_1^2$.

Nun ist X die Spitze der Dreiecke OPX und QPX und die Aufgabe wäre gelöst, wenn man einen geometrischen Ort für die

Figur 105.



Erkl. 79. Der verallgemeinerte Lehrsatz des *Pythagoras* lautet:

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert oder vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer der letzten Seiten und der Projektion der anderen auf sie, je nachdem der Gegenwinkel der ersten Seite ein spitzer oder ein stumpfer ist.

Erkl. 80. Der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks von bekannter Grundlinie und gegebener Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist ein Kreis um die Mitte der Grundlinie mit festem Halbmesser.

Erkl. 81. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und von einem gegebenen Kreis halbiert werden, ist ein Kreis um die Mitte der Zentrale des gegebenen Punktes mit festem Halbmesser.

Spitze eines Dreiecks kennen würde, in welchem die Grundlinie (OP bezw. QP) sowie die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten gegeben ist.

Dieser geometrische Ort lässt sich aber folgendermassen finden:

Es werde zur Abkürzung $OP = 2a$, $PX = x$, $OX = y$, $QP = 2b$, $QX = z$ gesetzt.

OP sei in c, QP in c_1 halbiert und die Schwerlinien Xc und Xc_1 der Dreiecke XOP und XPQ mit t bezw. t_1 bezeichnet, dann ist $Oc = Pc = a$, $Qc_1 = Pc_1 = b$. Von X fälle man auf OP und QP die Lote Xd bezw. Xd_1. Dann ist in dem spitzwinkligen Dreiecke OXc nach dem verallgemeinerten Satze des *Pythagoras* (siehe Erkl. 79):

3). . . . $y^2 = a^2 + t^2 - 2a \cdot cd.$

Ferner in dem stumpfwinkligen Dreieck PXc:

4). . . . $x^2 = a^2 + t^2 + 2a \cdot cd.$

Aus 3) und 4) folgt durch Addition:

5). . . . $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2t^2,$

ebenso folgt aus den beiden Dreiecken QXc_1 und PXc_1:

6). . . . $x^2 + z^2 = 2b^2 + 2t_1^2.$

Setzt man die angegebenen Bezeichnungen in die Gleichungen 1) und 2) ein, so lauten dieselben:

7). . . . $x^2 + y^2 = r^2,$

8). . . . $x^2 + z^2 = r_1^2.$

Diese Gleichungen, verglichen mit 5) und 6) ergeben:

9). . . $t^2 = \frac{1}{2}(r^2 - 2a^2) = \frac{1}{2}r^2 - a^2,$

10). . . $t_1^2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - 2b)^2 = \frac{1}{2}r_1^2 - b^2.$

Damit sind die Längen der Schwerlinien bekannt, und der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks ist ein Kreis um die Mitte der Grundlinie mit dieser Länge.

Die Grössen t und t_1 lassen sich nach dem Lehrsatze des *Pythagoras* als Katheten von rechtwinkligen Dreiecken zeichnen mit den Hypotenusen $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r$ bezw. $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r_1$ und den anderen Katheten a bezw. b. Die Grössen $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r$ und $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r_1$ sind die halben Diagonalen von Quadraten mit den Seiten r oder r_1, oder die ganzen Diagonalen

(S. Erkl. 26.) Lehrsatz des *Pythagoras*: Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

Angewendet auf das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck lautet er:

Die Hypotenuse im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck verhält sich zur Kathete wie: $\sqrt{2}:1 = 1:\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Figur 106.

von Quadraten mit den Seiten $\frac{1}{2}r$ und $\frac{1}{2}r_1$, oder die halben Quadrantensehnen der Kreise O und Q (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.).

Konstruktion. Ziehe (Fig. 106) PO, welche den Kreis O in n schneidet, halbiere PO in c, errichte auf PO in c und O Lote, das zweite schneidet den Kreis O in m, fälle von O auf Sehne nm das Lot Ol und beschreibe mit demselben um O einen Kreis, welcher das in c errichtete Lot in i schneidet, beschreibe um c mit ci einen Hilfskreis. Verfahre ebenso mit Kreis Q.

Die beiden Hilfskreise um c und c_1 schneiden einander in den Punkten X und Y, beschreibe um X mit XP, um Y mit YP Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Kreis X schneide Kreis O in a und b, ziehe Oa, Ob, OX, PX, cX, so ist nach dem Pythagoräer:

1).... $\overline{mn}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{On}^2 = 2r^2$.

Da Omn nach Konstruktion ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck ist, so ist:

$$Ol = \frac{1}{2}mn,$$

folglich:

$$\overline{Ol}^2 = \overline{Oi}^2 = \frac{1}{4}\overline{mn}^2 = \frac{1}{2}r^2.$$

Nach dem Pythagoräer ist im Dreieck Oci:

2).... $\overline{ci}^2 = \overline{cX}^2 = \overline{Oi}^2 - \overline{Oc}^2 = \frac{1}{2}r^2 - a^2$.

Fälle X$d \perp$ OP, so ist nach dem allgemeinen Pythagoräer in den Dreiecken OcX und PcX:

$$\overline{OX}^2 = \overline{Oc}^2 + \overline{cX}^2 + 2.Oc.cd$$
$$\overline{PX}^2 = \overline{Pc}^2 + \overline{cX}^2 - 2.Pc.cd.$$

Da aber Oc = Pc = a, so findet man durch Addition:

$$\overline{OX}^2 + \overline{PX}^2 = 2a^2 + 2\overline{cX}^2$$

oder wegen Gleichung 2):

$$\overline{OX}^2 + \overline{PX}^2 = 2a^2 + 2\left(\frac{1}{2}r^2 - a^2\right)$$

oder:

3).... $\overline{OX}^2 + \overline{PX}^2 = r^2$,

aber nach Erkl. 1 ist PX = Xa = Xb, daher ist:

4). . . . $\overline{OX}^2 + \overline{Xa}^2 = r^2 = \overline{Oa}^2$

5). . . . $\overline{OX}^2 + \overline{Xb}^2 = r^2 = \overline{Ob}^2$.

Nach der Umkehrung des Pythagoräers (siehe Erkl. 71) sind also die Dreiecke OXa und OXb bei O rechtwinklig, also Winkel $aOb = 180^0$, ab Durchmesser von Kreis X.

Ebenso wird bewiesen, dass Kreis X von Kreis Q nach einem Durchmesser geschnitten wird.

Determination. Es gibt im allgemeinen zwei Kreise, welche der Aufgabe genügen, da die Hilfskreise einander in zwei Punkten schneiden können.

Unerlässliche, aber nicht ausreichende Bedingung für die Möglichkeit der Aufgabe ist, dass die beiden Kreise O und Q einander schneiden, denn aus den Gleichungen 1) und 2) der Analysis folgt, dass: $OX < r$ und $QX < r_1$, also Punkt X innerhalb der beiden Kreise liegen muss. Ausserdem müssen die Kreise um O und Q mit Ol bezw. Ql_1 die Mittellote von OP bezw. QP schneiden, also $Ol > a$, $Ql_1 > b$ oder $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r > a$, $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r_1 > b$ oder OP muss $< 2 . Ol$, $OQ < 2 . Ql_1$ sein, d. h. der Punkt P darf von dem Mittelpunkte keines der beiden Kreise um mehr als seine Quadrantensehne entfernt sein.

(S. Erkl. 24.) Zwei Kreise schneiden einander, wenn ihre Zentrale grösser als die Summe, aber kleiner als die Differenz der Halbmesser ist.

Damit die beiden Hilfskreise einander schneiden, ist nötig, dass:

$$cc_1 > ci - ci_1 \text{ oder } > ci_1 - ci$$

und

$$cc_1 < ci + ci_1$$

sei.

Aber cc_1 ist Mittelparallele im Dreiecke OPQ, daher nach Erkl. 67 $= \frac{1}{2} OQ$, es muss somit:

$$ci + ci_1 > \frac{1}{2} OQ > ci - ci_1 \text{ (oder } ci_1 - ci)$$

sein.

Bezeichnet man OQ durch c und setzt die Werte von ci und ci_1 in diese Ungleichungen ein, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{1}{2} r^2 - a^2} + \sqrt{\frac{1}{2} r_1^2 - b^2} > \frac{1}{2} c$$
$$> \sqrt{\frac{1}{2} r^2 - a^2} - \sqrt{\frac{1}{2} r_1^2 - b^2}.$$

Man erhält nur eine Lösung, wenn entweder:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

— — —

☛ Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

— — —

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

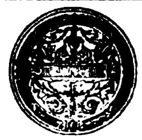
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

872. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 857. — Seite 97—112.
Mit 14 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 857. — Seite 97—112. Mit 14 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben, welche mit dem apollonischen Berührungsproblem zusammenhängen, gelöst durch Proportionen und algebraische Analysis.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form,** mit vielen **Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die **Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen **Lösung** (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der **Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16,** entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$\sqrt{\frac{1}{2}r^2 - a^2} + \sqrt{\frac{1}{2}r_1^2 - b^2} = \frac{1}{2}c$$

oder:

$$\sqrt{\frac{1}{2}r^2 - a^2} - \sqrt{\frac{1}{2}r_1^2 - b^2} = \frac{1}{2}c$$

ist (siehe Erkl. 10).

Anmerkung 34. Durch Subtraktion der Gleichungen 1) und 2) der Analysis erhält man:

$$\overline{OX}^2 - \overline{QX}^2 = r^2 - r_1^2.$$

Die Vergleichung mit der Gleichung der Potenzlinie (siehe Anmerkung 27) zeigt, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Potenzlinie der gegebenen Kreise, also auf der gemeinsamen Sehne derselben (siehe Anmerkung 28) liegt, man erhält daher folgenden Satz:

Erkl. 82. Wird ein Kreis von zwei anderen Kreisen halbiert, so müssen die beiden letzten Kreise einander schneiden, und ihre Schnittsekante ist geometrischer Ort für den Mittelpunkt des ersten Kreises.

Aufgabe 97. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet und einen andern gegebenen Kreis halbiert.

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. X sei Mittelpunkt des gesuchten Kreises, die Halbmesser von Kreis O und Kreis Q seien r und r_1.

Da Kreis O rechtwinklig geschnitten wird, muss nach Aufgabe 94 Analysis II, sein:

1). . . . $\overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 = r^2.$

Da Kreis Q halbiert wird, muss nach Aufgabe 95, Analysis, sein:

2). . . . $\overline{PX}^2 - \overline{QX}^2 = r_1^2.$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

3). . . . $\overline{OX}^2 - \overline{QX}^2 = r^2 + r_1^2.$

Unter Berücksichtigung von Erkl. 68a) folgt daraus, dass ein geometrischer Ort für X eine auf OQ senkrechte feste Gerade ist.

Den Fusspunkt dieser Senkrechten kann man finden, wenn man im Kreis Q den zu OQ senkrechten Durchmesser zieht und den Mittelpunkt desjenigen Kreises sucht, welcher durch die Endpunkte dieses Durchmessers geht und Kreis O rechtwinklig schneidet. Oder auch in folgender Weise: g sei der Fusspunkt, dann ist:

4). . . . $\overline{gO}^2 - \overline{gQ}^2 = r^2 + r_1^2$

oder:

Erkl. 83. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche von zwei gegebenen Kreisen den einen rechtwinklig schneiden, den andern halbieren, ist eine feste, zur Zentrale der gegebenen Kreise senkrechte Gerade.

$$(gO + gQ)(gO - Q) = r^2 + r_1^2,$$

aber:

$$gO + gQ = OQ,$$

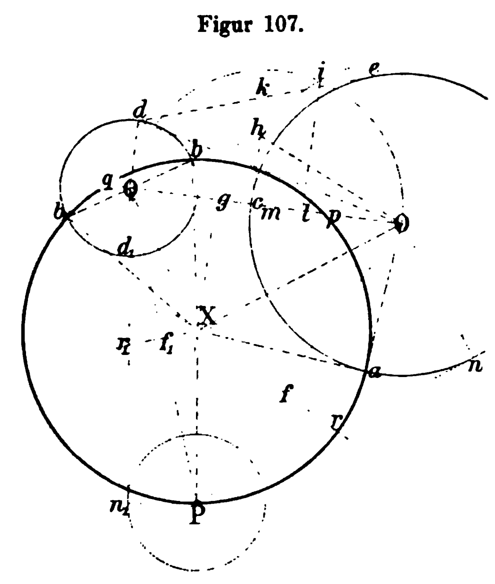
also:

5). . . . $OQ \cdot (gO - gQ) = r^2 + r_1^2$,

es ist also die Differenz der Abschnitte gO und gQ dritte Proportionale zur Zentrale und zu $\sqrt{r^2 + r_1^2}$. Die letztere Grösse ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit r und r_1 als Katheten.

Als weitere geometrische Oerter für X erhält man die Potenzlinie zwischen P und Kreis O und den in Erkl. 76 angeführten geometrischen Ort, welcher zur Potenzlinie zwischen P und Kreis Q symmetrisch in Bezug auf das Mittellot von PQ liegt.

Figur 107.



Konstruktion. Ziehe (Fig. 107) PO und PQ, ziehe von P an Kreis O die Tangente Pn und fälle von ihrer Mitte r das Lot rf auf PO; beschreibe um P einen Hilfskreis mit Halbmesser r_1, lege an ihn von Q aus die Tangente Qn_1 und fälle von ihrer Mitte r_1 auf PQ das Lot $r_1 f_1$. Die beiden Lote schneiden einander in X, beschreibe um X einen Kreis mit XP, so ist dieser der gesuchte.

Zur Probe ziehe OQ, welche Kreis O in c schneidet, errichte auf OQ in c die Senkrechte $ch = r_1$, beschreibe um O mit Oh einen Kreis, welcher einen über OQ beschriebenen Halbkreis in i trifft; fälle $il \perp$ OQ und trage von der Mitte m der OQ aus $\frac{1}{2}$Ol gegen Q hin nach g. Errichte auf OQ in g eine Senkrechte, so geht dieselbe durch X. Oder einfacher: Ziehe den zu OQ senkrechten Durchmesser dd_1 von Kreis Q, lege von d an Kreis O die Tangente Oe und fälle von ihrer Mitte k auf dO die Senkrechte, welche OQ in g schneidet.

Beweis. Nach Konstruktion und nach Aufgabe 94 ist rf Potenzlinie zwischen P und Kreis O, X liegt auf ihr, also ist:

1). . . . . . $\overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 = r^2$.

Kreis X schneide Kreis O in a, so ist:

$$Xa = XP, \; Oa = r,$$

also:

$$\overline{OX}^2 - \overline{Xa}^2 = \overline{Oa}^2,$$

daher ist nach der Umkehrung des Pythagoräers das Dreieck XOa bei a rechtwinklig.

Ferner ist nach Konstruktion $r_1 f_1$ Potenzlinie zwischen Punkt Q und dem Hilfskreis

(S. Erkl. 71.) Die Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes lautet:

Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

um P (siehe Erkl. 70). Punkt X liegt auf ihr, folglich ist:

2). . . . . . $\overline{PX}^2 - \overline{QX}^2 = r_1^2$.

Kreis X schneide Kreis Q in b und b_1, ziehe Xb, Xb_1, Qb, Qb_1, dann ist:

$$Xb = Xb_1 = XP,\ Qb = Qb_1 = r_1,$$

also:

$$\overline{Xb}^2 - \overline{XQ}^2 = \overline{Qb}^2$$
$$\overline{Xb_1}^2 - \overline{XQ}^2 = \overline{Qb_1}^2$$

Die Dreiecke XQb und XQb_1 sind also nach der Umkehrung des Pythagoräers bei Q rechtwinklig, also $\sphericalangle bQb_1 = 180^0$, bb_1 Durchmesser von Kreis Q.

Beweis der ersten Probe. $ch = r_1$, $Oc = r$, daher nach dem Pythagoräer:

$$\overline{Oh}^2 = r^2 + r_1^2,\ Oi = Oh \text{ (Erkl. 1)},$$

also:

$$\overline{Oi}^2 = r^2 + r_1^2.$$

(S. Erkl. 50.) Der Peripheriewinkel des Halbkreises ist ein Rechter.

Das Dreieck OQi ist rechtwinklig (siehe Erkl. 50), il ist Höhe darin, folglich ist nach dem Kathetensatze:

$$\overline{Oi}^2 = OQ \,.\, Ol.$$

Ol ist nach Konstruktion $= 2 \,.\, mg = (Og - Qg)$; $OQ = Og + Qg$, folglich:

$$r^2 + r_1^2 = (Og + Qg)(Og - Qg)$$

oder:

3). . . . . . $r^2 + r_1^2 = Og^2 - Qg^2$,

aber durch Addition von 1) und 2) folgt:

4). . . . . . $r^2 + r_1^2 = \overline{OX}^2 - \overline{QX}^2$,

folglich liegt X auf der Senkrechten zu OQ durch g.

Beweis der zweiten Probe. Nach Konstruktion ist kg Potenzlinie zwischen Punkt d und Kreis O (siehe Erkl. 70), folglich ist:

$$\overline{gO}^2 - \overline{gd}^2 = r^2,$$

aber nach dem Pythagoräer ist:

$$\overline{gd}^2 = \overline{gQ}^2 + r_1^2,$$

folglich:

$$\overline{Og}^2 - \overline{Qg}^2 = r^2 + r_1^2$$

u. s. w.

Determination. Es gibt nur eine Lösung, ausgenommen wenn die Geraden rf und $r_1 f_1$ parallel werden, was nur der Fall sein kann, wenn P auf OQ liegt. In diesem Falle gibt es entweder keine Lösung, oder, wenn beide Geraden in eine einzige und zwar mit gX zusammenfallen, unzählige Kreise, welche der Bedingung der Aufgabe genügen. Punkt P muss in diesem Falle eine ganz bestimmte Lage haben.

Anmerkung 35. Kreis X schneide OQ in p und q, so ist nach Gleichung 1) des Beweises:

1). . . . . $\overline{OX}^2 - \overline{pX}^2 = r^2,$

aber:

$$\overline{OX}^2 = \overline{gX}^2 + \overline{gO}^2,$$

$$\overline{pX}^2 = \overline{gX}^2 + \overline{gp}^2,$$

folglich:

2). . . . . $\overline{Og}^2 - \overline{gp}^2 = r^2$ oder $\overline{gp}^2 = \overline{Og}^2 - r^2.$

Ebenso folgt aus Gleichung 2) des Beweises:

3). . . . . $\overline{pX}^2 - \overline{QX}^2 = r_1^2,$

aber:

$$\overline{pX}^2 = \overline{gX}^2 + \overline{pg}^2,$$

$$\overline{QX}^2 = \overline{gX}^2 + \overline{Qg}^2,$$

folglich:

4). . . . . $\overline{pg}^2 - \overline{Qg}^2 = r_1^2$ oder $\overline{gp}^2 = \overline{Qg}^2 + r_1^2.$

Die zwei Gleichungen 2) und 4) beweisen, dass die Grösse pq nur von konstanten Grössen abhängt, daher erhält man den in Erkl. 84 ausgesprochenen Satz:

Erkl. 84. Alle Kreise, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig und einen zweiten gegebenen Kreis nach dem Durchmesser schneiden, gehen durch zwei feste Punkte der Zentrale der beiden gegebenen Kreise.

Anmerkung 36. Würde die Aufgabe vorliegen, einen Kreis zu zeichnen, welcher durch P geht, von Kreis O halbiert wird und Kreis Q halbiert, so würde man aus Aufgabe 96 und 95 die Gleichungen:

$$\overline{PX}^2 + \overline{OX}^2 = r^2$$

$$\overline{PX}^2 - \overline{QX}^2 = r_1^2$$

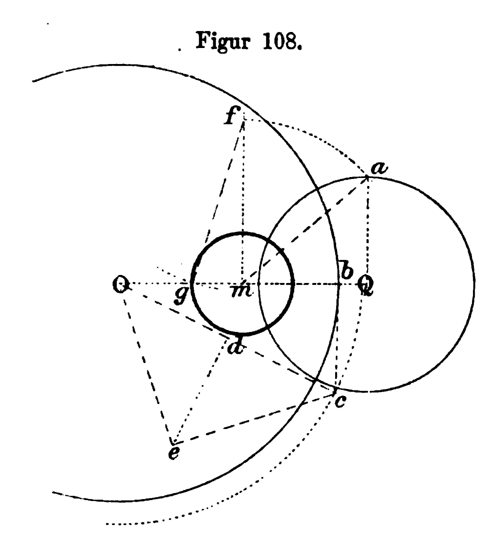
erhalten, woraus sich durch Subtraktion die Gleichung:

1). . . . . $\overline{OX}^2 + \overline{QX}^2 = r^2 - r_1^2$

ergibt. Die Analogie dieser Gleichung mit jeder der Gleichungen 1) und 2) von Aufgabe 96 beweist (vergl. auch Erkl. 79), dass der geometrische Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises ein Kreis um die Mitte von OQ mit bekanntem Halbmesser ist. Um den letzteren zu finden, hat man in Gleichung 1) von Aufgabe 96: O durch Q und r^2 durch $r^2 - r_1^2$ zu ersetzen, dann gibt die daraus hervorgehende Gleichung 9) von Aufgabe 96 für den Halbmesser t des geometrischen Orts:

2). . . . $t^2 = \frac{1}{2}(r^2 - r_1^2) - a^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r_1^2) - (a^2 + r_1^2)$,

wo a die halbe Zentrale OQ bedeutet. Die Grösse lässt sich dann sehr einfach konstruieren:



Figur 108.

Ziehe (Fig. 108) den Halbmesser $Qa \perp OQ$ und halbiere OQ in m, so ist ma^2 nach dem Pythagoräer $= \overline{mQ}^2 + \overline{Qa}^2 = a^2 + r_1^2$. Errichte im Endpunkte b des Halbmessers Ob auf diesem das Lot $bc = r_1$, so ist:

$$\overline{Oc}^2 = \overline{Ob}^2 + \overline{bc}^2 = r^2 + r_1^2.$$

Halbiere Oc in d, errichte auf Oc in d das Lot $de = \frac{1}{2}Oc$, so ist:

$$\overline{Oe}^2 = \overline{ce}^2 = \overline{de}^2 + \overline{dc}^2 = 2 . \overline{de}^2 =$$
$$2 . \tfrac{1}{4}\overline{Oe}^2 = \tfrac{1}{2}(r^2 + r_1^2),$$

mache $mf \perp OQ$ und gleich ma, beschreibe um f einen Kreis mit Oe, der OQ in g schneidet, so ist:

$$\overline{mg}^2 = \overline{gf}^2 - \overline{mf}^2 = \overline{Oe}^2 = \overline{ma}^2 =$$
$$\tfrac{1}{2}(r^2 + r_1^2) - (a^2 + r_1^2) = t^2.$$

Erkl. 85. Der in der vorhergehenden Anmerkung bewiesene Satz lautet:

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis halbieren und von einem gegebenen Kreis halbiert werden, ist ein fester Kreis um die Mitte der Zentrale der gegebenen Kreise.

Anmerkung 37. Auf ähnliche Weise wie in Anmerkung 36 erhält man auch für die Mittelpunkte solcher Kreise, welche den einen von zwei gegebenen Kreisen rechtwinklig schneiden und vom anderen halbiert werden, einen geometrischen Ort aus den zwei Gleichungen:

$$\overline{OX}^2 - \overline{PX}^2 = r^2 \text{ (siehe Aufgabe 94)},$$
$$\overline{QX}^2 + \overline{PX}^2 = r_1^2 \text{ (siehe Aufgabe 96)},$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Addition:

1). . . . . $\overline{OX}^2 + \overline{OX}^2 = r^2 + r_1^2$,

also ist der gesuchte geometrische Ort nach Erkl. 80 ein Kreis um die Mitte von OQ; für den Halbmesser t derselben erhält man aus Gleichung 9) von Aufgabe 96 die Gleichung:

2). . . . . $t^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r_1^2) - a^2$.

Erkl. 86. Aus Anmerkung 37 geht hervor:

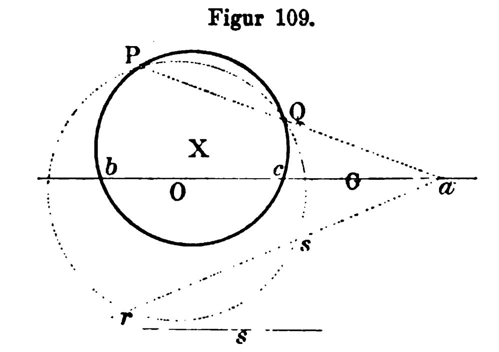
Der geometrische Ort für den Mittelpunkt aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden und von einem zweiten gegebenen Kreis halbiert werden, ist ein fester Kreis um die Mitte der Zentrale der gegebenen Kreise.

Aufgabe 98. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Gegeben: P, Q, G, s.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 109.



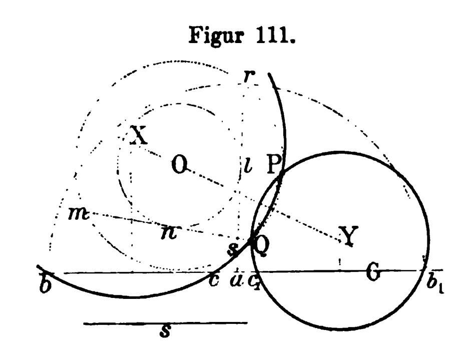
Analysis. Der gesuchte Kreis X (Fig. 109 und 110) schneide die Gerade G in b und c so, dass $bc = s$ sei. PQ schneide G in a, so ist in Figur 109, wo P und Q auf derselben Seite von G liegen, nach dem Sekantensatze, in Figur 110, wo P und Q durch G getrennt werden, nach dem Sehnensatze:

1). . . . . . $aP \,.\, aQ = ab \,.\, ac.$

Es sind also die zwei Strecken ab und ac so zu suchen, dass ihr Rechteck $= aP \,.\, aQ$ und in Figur 109 ihre Differenz, in Figur 110 ihre Summe $= s$ wird. Diese Hilfsaufgabe lässt sich mit Hilfe des Sekanten- oder Sehnensatzes ausführen, wenn man durch P und Q einen beliebigen Kreis legt, dessen Durchmesser grösser als s ist und in diesem Kreis durch a eine Sekante (Sehne) so zieht, dass die zugehörige Sehne $= s$ wird; dann sind die Abschnitte ar und as dieser Sekante (Sehne) gleich den Strecken ab und ac.

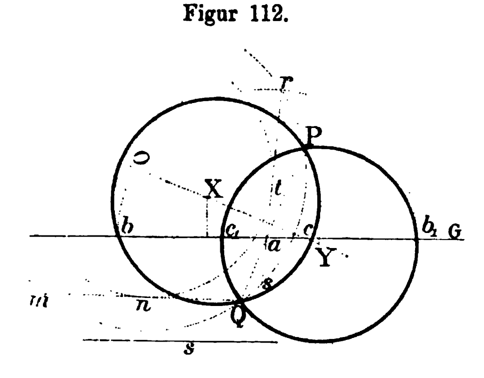
Figur 110.

Figur 111.



Konstruktion. Lege (Fig. 111 und 112) durch P und Q einen beliebigen Kreis mit Mittelpunkt O, dessen Durchmesser grösser als s ist, lege in denselben die Strecke s beliebig als Sehne hinein, etwa $= Qm$; beschreibe um O einen Hilfskreis, welcher Qm berührt und lege an diesen Hilfskreis von dem Durchschnittspunkt a der Geraden G und der Verbindungsgeraden PQ aus eine Tangente, welche den grösseren Kreis um O in r und s schneidet. Mache auf G die Strecken ab und $ab_1 = ar$ und lege durch P, Q, b und P, Q, b_1 Kreise, so sind diese die gesuchten.

Figur 112.



Beweis. G schneide den Kreis X in c, den Kreis Y in c_1, dann ist in Figur 111 nach dem Sekantensatz, in Figur 112 nach dem Sehnensatz, angewendet auf die Kreise X und Y:

1). . . . $ab \cdot ac = ab_1 \cdot ac_1 = a\mathrm{P} \cdot a\mathrm{Q}$;

nach den gleichen Sätzen, angewendet auf den Kreis O, ist:

2). . . . $a\mathrm{P} \cdot a\mathrm{Q} = ar \cdot as$,

also ist:

3). . . . $ab \cdot ac = ab_1 \cdot ac_1 = ar \cdot as$.

Nun ist nach Konstruktion:

4). . . . $ab = ab_1 = ar$.

Aus 3) und 4) folgt also:

5). . . . $ac = ac_1 = as$.

Aus 4) und 5) folgt in Figur 111 durch Subtraktion, in Figur 112 durch Addition:

6). . . . $bc = b_1c_1 = rs$.

Nun berühre der konzentrische Hilfskreis um O die Sehne rs in t, die Sehne Qm in n, so stehen Ot und On senkrecht auf den zugehörigen Sehnen (siehe Erkl. 10), sind also Mittellote derselben (siehe Erkl. 15), da aber Ot = On (siehe Erkl. 1), so sind auch die Sehnen sr und Qm einander gleich (siehe Erkl. 87).

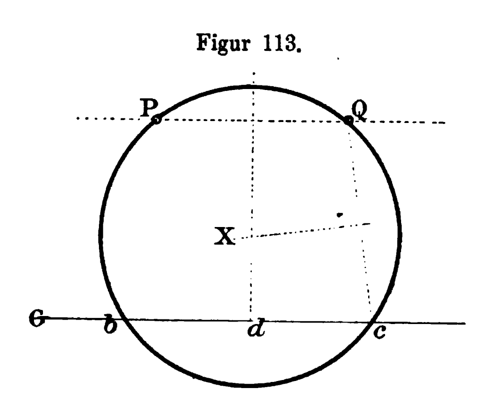
Erkl. 87. In demselben Kreis oder in gleichen Kreisen haben gleiche Sehnen gleiche Mittelsenkrechten und umgekehrt, oder: Zieht man an den Inneren zweier konzentrischer Kreise Tangenten, so sind ihre in den grösseren Kreis fallenden Abschnitte einander gleich.

Es ist aber nach Konstruktion Qm = s, daraus folgt mit Rücksicht auf 6):

7). . . . $bc = b_1c_1 = s$.

Determination. Im Falle der Figuren 109 und 111 kann s jede beliebige Grösse haben, im Falle der Figuren 110 und 112 dagegen muss s mindestens doppelt so gross sein als die mittlere Proportionale aus aP und aQ. Dem letzteren Falle entspricht bei der Konstruktion der Umstand, dass der konzentrische Hilfskreis um O gerade durch a geht, denn dann steht rs auf Oa in a senkrecht (siehe Erkl. 70), wird also in a halbiert (siehe Erkl. 15), es ist also dann $ar = as$, $ab = ac$.

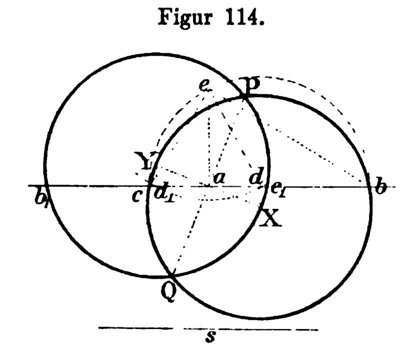
Figur 113.



Es gibt im allgemeinen zwei Lösungen.

Eine einzige Lösung erhält man, wenn PQ parallel mit G ist. Dann steht das Mittellot von PQ senkrecht auf G und ist zugleich Mittellot der Sehne bc, man hat also nur (Fig. 113) von dem Schnittpunkte d der G mit dem Mittellot von PQ die halbe Strecke s beiderseits nach b und c zu tragen

Figur 114.



und einen Kreis durch drei der Punkte P, Q, b, c zu legen.

Eine Vereinfachung der Konstruktion findet auch in dem Falle statt, wo G durch die Mitte von PQ geht:

Errichte auf G in a das Lot $ae = a$P, beschreibe um e mit $\frac{1}{2}s$ einen Kreis, der G in d und d_1 schneidet, errichte in d und d_1 auf G Lote, welche das Mittellot von PQ in X und Y treffen (Fig. 114).

Beweis. Xd ist nach Konstruktion $\perp bc$, also d Mitte von bc, folglich ist:

$$ab\,.\,ac = (\tfrac{1}{2}bc + ad)(\tfrac{1}{2}bc - ad)$$

oder:

1). . . . . $ab\,.\,ac = \frac{1}{4}\overline{bc}^2 - \overline{ad}^2$,

andererseits ist nach dem Sehnensatz:

$$ab\,.\,ac = a\mathrm{P}\,.\,a\mathrm{Q} = \overline{a\mathrm{P}}^2 = \overline{ac}^2,$$

folglich:

2). . . . . $\overline{ae}^2 = \frac{1}{4}\overline{bc}^2 - \overline{ad}^2$,

aber das rechtwinklige Dreieck ade liefert nach dem Pythagoräer die Gleichung:

$$\overline{ae}^2 = \overline{de}^2 - \overline{ad}^2$$

oder da $de = \frac{1}{2}s$:

3). . . . . $\overline{ae}^2 = \frac{1}{4}s^2 - \overline{ad}^2$.

Aus 2) und 3) folgt:

4). . . . . $bc = s$.

Aufgabe 99. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gerade Linien berührt und eine dritte Gerade, welche durch den Schnittpunkt der beiden anderen geht, nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Gegeben: G, G_1, G_2, s.

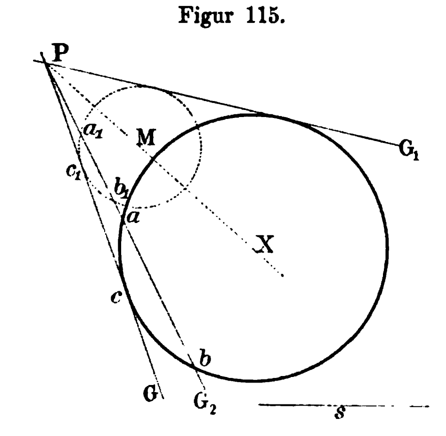
Voraussetzung: G, G_1, G_2 gehen durch P.

Gesucht: Kreis um X.

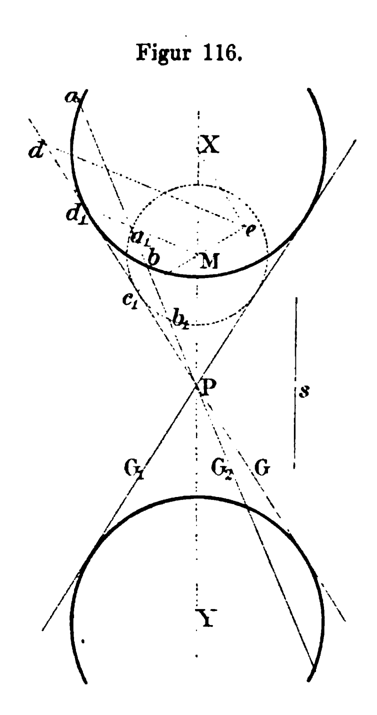
Analysis. Kreis X (Fig. 115) berühre G in c und schneide G_2 nach der Sehne $ab = s$. Ein geometrischer Ort für X ist die Halbierungsgerade des Winkels zwischen G und G_1, in welchem G_2 liegt (siehe Frage 15).

Man denke sich einen zweiten, beliebigen Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt M auf dieser Halbierungsgeraden liegt, und welcher G in c_1 berührt, so berührt derselbe vermöge der Symmetrie des Winkels

Figur 115.



Figur 116.



in Bezug auf seine Halbierungsgerade auch die Gerade G_1 (siehe Erkl. 51).

Dieser Kreis schneide G_2 in a_1 und b_1. Nun ist, wenn beide Kreise im gleichen Winkelraum liegen, der Schnittpunkt P der drei Geraden äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise X und M, liegen sie in Scheitelräumen, so ist P innerer Aehnlichkeitspunkt zu beiden Kreisen (siehe Erkl. 57, 58, 60). Die beiden Strecken ab und $a_1 b_1$ sind homologe Strecken, also verhalten sie sich wie die Halbmesser (siehe Erkl. 57), daher ist:

$$1). \ldots\ldots \quad a_1 b_1 : \mathrm{M} a_1 = s : x,$$

wo x den Halbmesser des gesuchten Kreises bedeutet. Dieser kann also als vierte Proportionale gefunden und die weitere Konstruktion nach Aufgabe 4 geführt werden.

Konstruktion. Errichte in einem beliebigen Punkte c_1 auf G eine Senkrechte, welche die Halbierungsgerade desjenigen Winkels zwischen G und G_1, in dem G_2 liegt, in M schneidet.

Beschreibe um M mit $\mathrm{M}c_1$ einen Kreis, der G_2 nach der Sehne $a_1 b_1$ schneidet. Mache auf G von c_1 aus die Strecken $c_1 d_1 = a_1 b_1$ und $c_1 d = s$, beide nach derselben Richtung, ziehe $d_1\mathrm{M}$ und die Parallele dazu durch d. Letztere trifft $c_1\mathrm{M}$ in e, ziehe durch e die Parallele zu G, welche die Winkelhalbierende in X schneidet. Mache auf der Winkelhalbierenden von P aus die Strecke PY = PX und beschreibe um X und Y mit $c_1 e$ Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis. Der Kreis um X mit $c_1 e$ berührt die Gerade G, weil X auf der Parallelen durch e zu G liegt (siehe Erkl. 10 und Frage 7). Da X ein Punkt der Winkelhalbierenden zwischen G und G_1 ist, so berührt Kreis X auch die Gerade G_1 (siehe Frage 15 und Erkl. 51). Daher sind G und G_1 gemeinschaftliche Tangenten an die Kreise X und M, folglich ist der Schnittpunkt P äusserer Aehnlichkeitspunkt für dieselben (siehe Erkl. 57). G_2 ist äusserer Aehnlichkeitsstrahl (siehe Erkl. 57). Sind a und b die Schnittpunkte von G_2 mit Kreis X, so sind ab und $a_1 b_1$ homologe Strecken, und es ist daher nach Erkl. 57:

$$ab : a_1 b_1 = \text{Halbm. v. X . Halbm. v. M}$$

oder:

$$1). \ldots\ldots \quad ab : a_1 b_1 = c_1 e : c_1\mathrm{M}.$$

(S. Erkl. 57.) Die Verbindungsgerade irgend zweier gleichgerichteter Halbmesser in zwei Kreisen schneidet die gemeinschaftliche Zentrale in einem festen Punkte, dem äusseren Aehnlichkeitspunkt, welcher die Zentrale aussen im Verhältnis der Halbmesser teilt. Irgend eine durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt gehende Gerade heisst äusserer Aehnlichkeitsstrahl.

Die Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahls mit gleich gerichteten Halbmessern heissen homologe Punkte. Die Verbindungsgeraden oder

Verbindungsstrecken homologer Punkte heissen homologe Geraden oder homologe Strecken.

Homologe Strecken verhalten sich wie die Halbmesser.

Die Abstände homologer Punkte vom Aehnlichkeitspunkt verhalten sich wie die Halbmesser.

(S. Erkl. 56.) Wenn die Seiten zweier Dreiecke einzeln parallel sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist aber $M d_1 \parallel X d$, daher sind die Dreiecke $c_1 M d_1$ und $c_1 e d$ ähnlich (siehe Erkl. 56), also ist:

2). . . . . $cd : c_1 d_1 = c_1 e : c_1 M$,

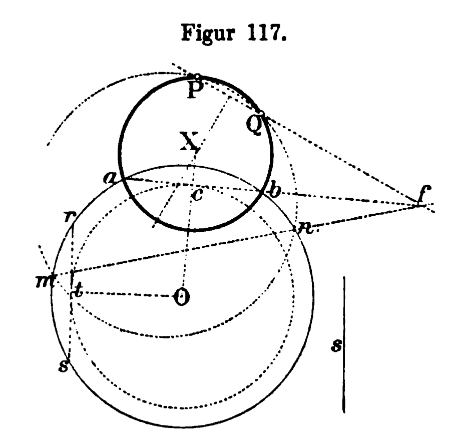
aber $a_1 b_1 = c_1 d_1$ nach Konstruktion, folglich:

3). . . . . . . $ab = c_1 d = s$.

Analog ist der Beweis für den Kreis Y.

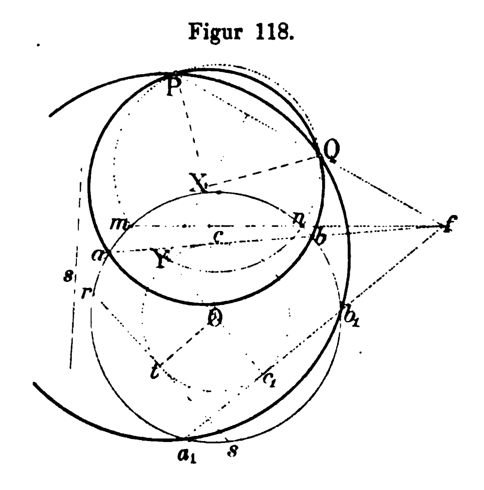
Aufgabe 100. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Figur 117.



(S. Erkl. 87.) Gleiche Sehnen eines Kreises werden von einem konzentrischen Kreise berührt.

Figur 118.



Gegeben: P, Q, Kreis um O, s.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. In Fig. 117 gehe der gesuchte Kreis X durch P und Q und schneide den gegebenen Kreis O in a und b, so dass $ab = s$ ist. Ein geometrischer Ort für X ist das Mittellot von PQ.

Man verlängere PQ und ab bis zu ihrem Schnitt in f, so ist nach dem Sekantensatz:

1). . . . . . $fP . fQ = fa . fb$.

Denkt man sich von f noch eine zweite Sekante in den Kreis O gezogen, welche ihn in m und n schneidet, so ist:

2). . . . . . $fa . fb = fm . fn$.

Aus 1) und 2) folgt:

3). . . . . . $fP . fQ = fm . fn$,

folglich müssen nach der Umkehrung des Sekantensatzes die Punkte P, Q, m, n auf einer Kreislinie liegen, und man hat somit ein Mittel, um Punkt f zu finden. Es sei ferner c die Mitte von ab, so ist $Oc \perp ab$ (Erkl. 15). Ein Kreis um O mit Oc berührt daher ab, und die Aufgabe ist gelöst, wenn man diesen Kreis finden kann. Nach Erkl. 87 berührt aber dieser Kreis sämtliche Sehnen im Kreis O, welche die Länge $ab = s$ haben, und man kann ihn daher konstruieren, wenn man $rs = s$ beliebig in den Kreis O legt und mit ihrem Abstand Ot vom Mittelpunkt einen konzentrischen Kreis zeichnet.

Konstruktion. Ziehe PQ (Fig. 118) und errichte auf PQ das Mittellot. Lege durch P und Q einen beliebigen Kreis, welcher den gegebenen Kreis O in m und n schneidet, ziehe mn, welche PQ in f trifft.

Lege die Strecke s beliebig als Sehne rs in Kreis O, fälle auf rs das Lot Ot und

beschreibe um O mit Ot einen Hilfskreis, lege an diesen von f aus die Tangenten fc und fc_1, welche den Kreis O in a und b bezw. a_1 und b_1 schneiden.

Ziehe Oc und Oc_1, welche das Mittellot von PQ in X bezw. Y treffen, und beschreibe um X mit XP, um Y mit YP Kreise, so sind diese die gesuchten.

(S. Erkl. 19.) Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke über derselben Grundlinie liegen auf dem Mittellot der letzteren.

Beweis. Da X auf dem Mittellot von PQ liegt, so ist XQ = XP, Kreis X geht also auch durch Q.

Nach Konstruktion ist $Oc = Oc_1 = Ot$, folglich ist nach der Umkehrung von Erklärung 87:

(S. Erkl. 87.) Umkehrung: Sehnen, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkt eines Kreises haben (oder welche einen konzentrischen Kreis berühren), sind einander gleich.

1). . . . . $ab = a_1 b_1 = rs = s.$

Nun ist aber nach dem Sekantensatz, angewendet auf den Kreis O:

2). . . . . $fa \,.\, fb = fm \,.\, fn.$

Nach dem gleichen Satz, angewendet auf den beliebigen Kreis:

3). . . . . $fm \,.\, fn = f\mathrm{P} \,.\, f\mathrm{Q},$

folglich ist:

4). . . . . $fa \,.\, fb = f\mathrm{P} \,.\, f\mathrm{Q},$

folglich liegen nach der Umkehrung des Sekantensatzes die Punkte P, Q, a, b auf einem Kreise.

(S. Erkl. 15.) Das Lot vom Mittelpunkt auf eine Sehne ist Mittellot derselben.

Nach Erkl. 15 ist Oc Mittellot von ab, und da X auf Oc liegt, so ist der Kreis um X mit XP der Umkreis des Kreisvierecks P Q b a.

Analog ist der Beweis für Kreis Y.

Anmerkung 38. Die Konstruktion bleibt dieselbe, wenn P und Q innerhalb des Kreises O liegen oder durch den Kreis O getrennt werden. In Analysis und Beweis tritt an Stelle des Sekantensatzes zum Teil der Sehnensatz.

Determination. Die Strecke s darf nicht grösser sein als der Durchmesser von Kreis O.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn beide gegebene Punkte auf dem Kreise liegen und ihre Zwischensehne von s verschieden ist, während in dem Falle, wo diese Zwischensehne $= s$ ist, jeder durch P und Q gehende Kreis der Aufgabe genügt.

Die Aufgabe lässt sich ohne Proportionen lösen, wenn die Punkte P und Q vom Mittelpunkte O gleichen Abstand haben. Die Sehne $ab = s$ wird dann parallel mit PQ.

Liegen P und Q auf einem Durchmesser von Kreis O, so liegen beide Lösungen symmetrisch zu diesem Durchmesser.

Aufgabe 101. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden berührt und eine dritte nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Gegeben: G, G_1, L, s.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Geraden G und G_1 sollen berührt, die Gerade L nach der Sehne s geschnitten werden.

Ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt X ist das Halbierungsgeradenpaar H und H_1 der Winkel zwischen G und G_1.

(S. Erkl. 20.) Alle Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand haben, liegen auf seiner Halbierungsgeraden.

In Fig. 119 berühre Kreis X die Geraden G bezw. G_1 in a bezw. a_1 und schneide L in b und b_1. Ziehe Xa und Xb und fälle die Senkrechte $Xc \perp L$, so ist nach Erkl. 15 c die Mitte von bb_1, also $bc = b_1c = \frac{1}{2}s$. Daher ist in dem rechtwinkligen Dreieck Xbc: $\overline{Xc}^2 = \overline{Xb}^2 - \overline{bc}^2$, oder da $Xb = Xa$ ist, so muss sein:

$$1). \ldots\ldots \overline{Xa}^2 - \overline{Xc}^2 = \tfrac{1}{4}s^2.$$

Die Aufgabe kommt also darauf hinaus: Auf einer der Geraden H oder H_1 einen Punkt X so zu suchen, dass die Differenz der Quadrate der von ihm aus auf G und L gefällten Lote gegeben ist.

Diese Aufgabe soll algebraisch gelöst werden.

Der gemeinsame Schnittpunkt von G, G_1, H, H_1 sei A. L werde von G in B, von H in M, von H_1 in N geschnitten. Man fälle die Senkrechten AH auf L, MK und NK_1 auf G, so sind die rechtwinkligen Dreiecke AXa und AMK, ebenso die rechtwinkligen Dreiecke MXc und MAH ähnlich.

Erkl. 88. Zwei Dreiecke sind ähnlich,

a). wenn sie zwei Winkel entsprechend gleich haben;

b). wenn sie einen Winkel gleich haben und zwei entsprechende Strecken in beiden Dreiecken gleiches Verhältnis haben;

c). wenn drei entsprechende Strecken in beiden Dreiecken gleiches Verhältnis haben.

Sind zwei Dreiecke ähnlich, so haben entsprechende Strecken in beiden Dreiecken das gleiche Verhältnis.

Es ist daher:

$$2). \ldots\; AX : Xa = AM : MK$$

$$3). \ldots\; MX : Xc = AM : AH.$$

In diesen Proportionen sind die Grössen AX, MX, Xa, Xc unbekannt; zwischen Xa und Xc existiert die Gleichung 1)., also braucht man noch eine Beziehung zwischen den unbekannten Grössen.

Erkl. 89. Zur algebraischen Bestimmung mehrerer Unbekannten sind ebenso viele Gleichungen erforderlich, als Unbekannte vorhanden sind.

Nun ist, je nachdem X zwischen A und M oder auf der Verlängerung von AM über M hinaus liegt:

$$4a). \ldots\ldots AX + MX = AM$$

oder

$$4b). \ldots\ldots AX - MX = AM.$$

Auf der Verlängerung von AM über A hinaus kann dagegen X nicht liegen, da in den Winkelraum III, in welchem der ge-

Figur 119.

suchte Kreis dann enthalten wäre, die Gerade nicht reicht.

Für einen auf H_1 liegenden Punkt Y, welcher der obigen Aufgabe Genüge leisten soll, muss ebenso sein:

5). . . . $\overline{Ya'}^2 - \overline{Yc'}^2 = \frac{1}{4}s^2$

6). . . . $AY : Ya' = AN : NK_1$

7). . . . $NY : Yc' = AN : AH$

und

8a). . . . . $AY + NY = AN$

oder

8b). . . . . $AY - NY = AN$

oder

8c). . . . . $NY - AY = AN$,

je nachdem Y zwischen N liegt, oder auf der Verlängerung von AN über N hinaus, oder auf der Verlängerung von NA über A hinaus.

Zu grösserer Bequemlichkeit bezeichne man:

AM	mit	m,	AN	mit	n,
MK	„	k,	NK_1	„	k'_1,
Xa	„	x,	Ya'	„	y,
Xc	„	z,	Yc'	„	z',
AX	„	u,	AY	„	u',
MX	„	v,	NY	„	v',
AH	„	h,	$\frac{1}{2}s$	„	s_1.

Dann geben die Gleichungen 1) und 5):

$$x^2 - z^2 = s_1^2;\quad y^2 - z'^2 = s_1^2,$$

woraus sich ergibt:

Erkl. 90. Wo es nur auf die Grösse ankommt, kann man Gleiches für Gleiches setzen.

9). . $z = \sqrt{x^2 - s_1^2}$, $z' = \sqrt{y^2 - s_1^2}$.

Die Proportionen 2), 3), 6), 7) lauten unter Einsetzung der Werte aus 9):

10). . . . . $u : x = m : k$

11). . . . . $u' : y = n : k'_1$

12). . . . . $v : \sqrt{x^2 - s_1^2} = m : h$

13). . . . . $v' : \sqrt{y^2 - s_1^2} = n : h$.

Ferner lauten 4a) und 4b):

14a). . . . . . $u + v = m$

14b). . . . . . $u - v = m$.

Die Gleichungen 5a), 5b), 5c):

15a). . . . . . $u' + v' = n$

15b). . . . . . $u' - v' = n$

15c). . . . . . $v' - u' = n$.

Setzt man den Wert von u aus 14a),

bezw. 14b), nämlich $u = m \mp v$ in 10) ein, so erhält man:

$$m \mp v : x = m : k,$$

woraus:

$$m \mp v = \frac{mx}{k} \text{ oder } v = \mp \frac{m(x-k)}{k}.$$

Dies in 12) eingesetzt gibt:

$$\mp \frac{m(x-k)}{k} : \sqrt{x^2 - s_1^2} = m : h$$

oder:

$$\mp (x-h) : \sqrt{x^2 - s_1^2} = k : h \text{ (s. Erkl. 90)}$$

oder:

$$(x-k)^2 : x^2 - s_1^2 = k^2 : h^2 \text{ (s. Erkl. 91).}$$

Daraus bekommt man die Gleichung:

$$x^2(h^2-k^2) - 2h^2kx + k^2(h^2+s_1^2) = 0,$$

oder:

16). $$x^2 - \frac{2h^2k}{h^2-k^2}x + \frac{k^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k^2} = 0.$$

Auf dem gleichen Wege erhält man aus 15a) und 15b), 11) und 13) die Gleichung:

17a). $$y^2 - \frac{2h^2k'}{h^2-k'^2} + \frac{k'^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k'^2} = 0.$$

Dagegen aus 15c), 11) und 13):

17c). $$y^2 + \frac{2h^2k'}{h^2-k'^2} + \frac{k'^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k'^2} = 0.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichungen gibt (siehe Erkl. 92):

18). . . . $$x = \frac{h^2k}{h^2-k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2k}{h^2-k^2}\right)^2 - \frac{k^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k^2}}.$$

19a). . . $$y_1 = \frac{h^2k'}{h^2-k'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2k'}{h^2-k'^2}\right)^2 - \frac{k'^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k'^2}}$$

19c). . . $$y_2 = \frac{-h^2k'}{h^2-k'^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2k'^2}{h^2-k'^2}\right) - \frac{k'^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k'^2}}.$$

Es handelt sich nun darum, die Grössen:

$$\frac{h^2k}{h^2-k^2}, \frac{k^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k^2}, \frac{h^2k'}{h^2-k'^2}, \frac{h'^2(h^2+s_1^2)}{h^2-k'^2}$$

zu **konstruieren**. Dieselben lassen sich zu diesem Zweck etwas umformen:

Erkl. 91. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man homologe Glieder mit der gleichen Grösse multipliziert oder dividiert.

Eine Proportion bleibt richtig, wenn man aus allen Gliedern die Quadratwurzel zieht.

Eine Proportion bleibt richtig, wenn man alle Glieder quadriert.

Erkl. 92. Die Wurzel der quadratischen Gleichung: $x^2 + 2px + q = 0$ ist:

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

h und k sind Höhen in dem Dreieck AMB (Fig. 119). Daher sind:

Erkl. 93. Die Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

$$h : k = \text{AB} : \text{MB} \text{ (siehe Erkl. 93),}$$

also:

$$h^2 : k^2 = \overline{\text{AB}}^2 : \overline{\text{MB}}^2 \text{ (siehe Erkl. 91),}$$

oder (siehe Erkl. 94):

Erkl. 94. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie zwei homologe Glieder.

20a). $h^2 : h^2 - k^2 = \overline{\text{AB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{MB}}^2$

20b). $k^2 : h^2 - k^2 = \overline{\text{MB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{MB}}^2$.

Ebenso sind h und k_1 Höhen in dem Dreieck ANB, folglich ist:

$$h : k' = \text{AB} : \text{NB},$$

also:

21a). $h^2 : h^2 - k'^2 = \overline{\text{AB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{NB}}^2$

21b). $k'^2 : h^2 - k'^2 = \overline{\text{NB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{NB}}^2$.

Bezeichnet man

$$\frac{h^2 k}{h^2 - k^2} \text{ mit } p, \quad \frac{h^2 k'}{h^2 - k'^2} \text{ mit } p',$$

$$\frac{k^2 (h^2 + s_1^2)}{h^2 - k^2} \text{ mit } q^2, \quad \frac{k'^2 (h^2 + s_1^2)}{h^2 - k'^2} \text{ mit } q'^2,$$

so ist wegen 20a) und 21a):

$$22). \ldots \begin{cases} p : k = \overline{\text{AB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{MB}}^2 \\ p' : k' = \overline{\text{AB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{NB}}^2. \end{cases}$$

Man kann also p und p' als vierte Proportionalen finden, wenn man ein Mittel hat, um zwei Strecken zu zeichnen, die sich wie die Quadrate zweier anderen verhalten.

Hierzu verwendet man die in Erkl. 95, 96 und 97 gegebenen Sätze.

Erkl. 95. In jedem rechtwinkligen Dreieck verhält sich das Quadrat einer Kathete zum Quadrat der Hypotenuse, wie die Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse zur Hypotenuse.

Beweis. Ist a die Hypotenuse, b die Kathete, p ihre Projektion auf die Hypotenuse, so ist nach dem Kathetensatz (siehe Erkl. 49)

$$b^2 = a \cdot p,$$

folglich:

$$b^2 : a^2 = a \cdot p : a^2 = p : a$$

q. e. d.

Ferner ist:

$$q^2 : h^2 + s_1^2 = k^2 : h^2 - k'^2$$
$$= \overline{\text{MB}}^2 : \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{MB}}^2,$$

folglich:

$$23). \begin{cases} q : \sqrt{h^2 + s_1^2} = \text{MB} : \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{MB}}^2} \\ \text{ebenso} \\ q' : \sqrt{h^2 + s_1^2} = \text{NB} : \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{NB}}^2} \end{cases}$$

Die Grössen:

$$\sqrt{h^2 + k^2}, \ \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{MB}}^2}, \ \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{NB}}^2}$$

erhält man mit Hilfe von rechtwinkligen Dreiecken unter Anwendung des Pythagoräers.

Erkl. 96. In jedem rechtwinkligen Dreiecke verhält sich das Quadrat einer Kathete zum Quadrat ihrer Projektion auf die Hypotenuse wie die Hypotenuse zu dieser Projektion.

Denn:

$$b^2 = a \cdot p,$$

folglich:

$$b^2 : p^2 = a \cdot p : p^2 = a : p.$$

Erkl. 97. In jedem rechtwinkligen Dreiecke verhalten sich die Quadrate der Katheten wie ihre Projektionen auf die Hypotenuse.

Denn:

$$b^2 = a \cdot p;\ c^2 = a \cdot q,$$

folglich:

$$b^2 : c^2 = a \cdot p : a \cdot q = p : q.$$

Wenn $h < k$, so wird $h^2 - k^2$ negativ, dann lautet der Ausdruck für x in Gleichung 18):

$$24) \ldots \quad x = -\frac{h^2 k}{k^2 - h^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 k}{k^2 - h^2}\right)^2 + \frac{k^2 (h^2 + s_1^2)}{k^2 - h^2}}$$

Ist $h < k_1$, so lautet der Ausdruck für y in 19a) und 19c):

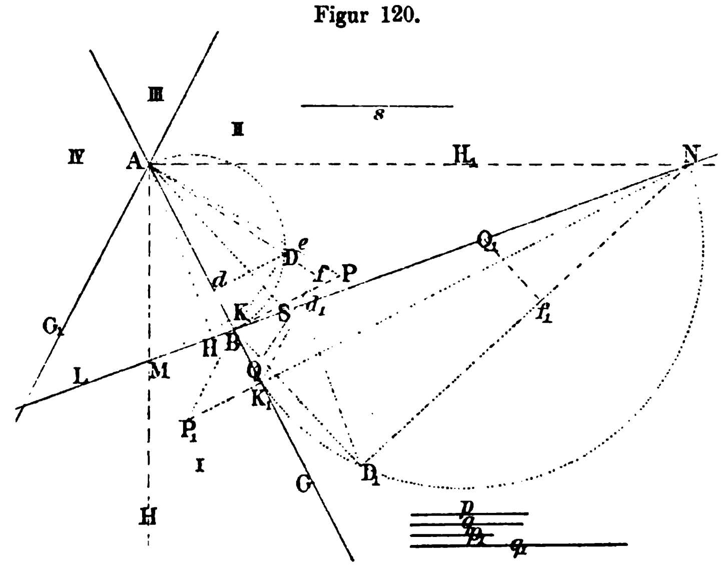
$$25a) \ldots \quad y_1 = -\frac{h^2 k'}{k'^2 - h^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 k'}{k'^2 - h^2}\right)^2 + \frac{k'^2 (h^2 + s_1^2)}{k'^2 - h^2}}$$

$$25c) \ldots \quad y_2 = +\frac{h^2 k'}{k'^2 - h^2} \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 k'}{k'^2 - h^2}\right)^2 + \frac{k'^2 (h^2 + s_1^2)}{k'^2 - h^2}}.$$

Selbstverständlich sind dann in den Gleichungen 22) und 23) die Differenzen ebenso in ihr Gegenteil umzukehren.

Konstruktion. I. Konstruktion der Grössen p, q, p', q'. L schneidet G in B, die Halbierungsgeraden H und H_1 der Winkel zwischen G und G_1 in M und N.

Figur 120.



Fälle AH $\perp$ L, MK und NK_1 $\perp$ G. Mache HS $= \frac{1}{2} s$ und ziehe AS.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ **Das vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

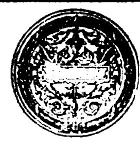
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

873. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 872. — Seite 113—128.
Mit 8 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.
Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 872. — Seite 113—128. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1891.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Beschreibe über AB einen Halbkreis und lege in denselben von B aus die Sehne BD = BM. Fälle das Lot $Dd \perp G$, mache auf demselben $de = MK$, ziehe Ae, welche eine auf AB in B errichtete Senkrechte in P trifft, so ist $BP = p$.

Ziehe AD und mache auf ihr $Af = AS$. Ziehe durch f die Parallele zu BD, welche die Gerade G in Q trifft, so ist $fQ = q$.

Beschreibe über BN einen Halbkreis und lege von B aus in denselben die Sehne $BD_1 = BA$. Fälle $D_1 d_1 \perp L$. Ziehe $d_1 K_1$ und die Parallele dazu durch B, welche die Verlängerung von NK_1 in P_1 trifft, so ist $K_1 P_1 = p_1$. Mache auf ND_1 von N aus die Strecke $Nf_1 = AS$, ziehe $f_1 Q_1$ parallel mit $D_1 B$ bis zum Schnitt mit L, so ist $NQ_1 = q_1$.

(S. Erkl. 50.) Der Peripheriewinkel des **Halbkreises ist ein rechter Winkel.**

Beweis. Dreieck ADB ist rechtwinklig (siehe Erkl. 50), also nach dem Pythagoräer:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{MB}^2.$$

Nach Erklärung 96 ist:

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = Ad : AB.$$

Die Dreiecke Ade und ABP sind ähnlich (siehe Erkl. 88) und $de = MK = k$, folglich:

$$\begin{aligned} BP : K &= AB : Ad \\ &= \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 \\ &= \overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 - \overline{MB}^2, \end{aligned}$$

also $BP = p$ (siehe Analysis, Gleichung 22). Nach Konstruktion ist: $HS = \frac{1}{2}s = s_1$, folglich im rechtwinkligen Dreieck AHS nach dem Pythagoräer:

Erkl. 98. Wenn in zwei Proportionen drei entsprechende Paare von Gliedern gleich sind, so sind auch die vierten gleich.

$$\overline{AS}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HS}^2 = h + s_1^2.$$

Die Dreiecke ADB und AfQ sind ähnlich, folglich:

$$fQ : Af = BD : AD, \quad \text{oder:}$$

$$fQ : \sqrt{h^2 + s_1^2} = MB : \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{MB}^2},$$

also $fQ = q$, siehe Analysis, Gleichung 23. Dreieck BND_1 ist rechtwinklig (Erkl. 50), also:

$$\overline{ND_1}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{BD_1}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{AB}^2.$$

Nach Erklärung 98 ist

$$\overline{ND_1}^2 : \overline{BD_1}^2 = Nd_1 : Bd_1.$$

Die Dreiecke Nd_1K_1 und NBP_1 sind ähnlich, daher:

$$P_1K_1 : NK_1 = Bd_1 : Nd_1$$

oder:

$$P_1K_1 : k_1 = \overline{BD_1}^2 : \overline{BN}^2 - \overline{BD_1}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{BN}^2 - \overline{AB}^2,$$

daher $P_1 k_1 = p_1$ (negativ zu nehmen).

Da $f_1 Q_1 \perp ND_1$, also $\parallel BD_1$ ist, so sind die Dreiecke Nf_1Q_1 und ND_1B ähnlich, daher:

$$NQ_1 : Nf_1 = NB : ND_1,$$

aber nach Konstruktion ist $Nf_1 = AS = \sqrt{h^2 + s_1^2}$, folglich:

$$NQ_1 : \sqrt{h^2 + s_1^2} = NB : \sqrt{\overline{NB}^2 - \overline{AB}^2}$$

daher:

$$NQ_1 = q_1.$$

II. Konstruktion der Halbmesser der gesuchten Kreise.

Die zu verwendenden Ausdrücke für x und y sind in vorliegendem Falle, wo $h > k$, aber $h < k_1$ ist:

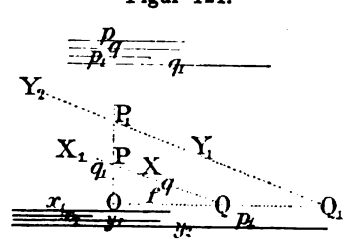
$$x = p \pm \sqrt{p^2 - q^2}$$

$$y_1 = -p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$$

$$y_2 = +p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + q_1^2}.$$

Man kann, da x und y Halbmesser von Kreisen bedeuten, nur positive Werte brauchen. $\sqrt{p^2 - q^2}$ ist kleiner als p, daher beide Werte von x positiv; $\sqrt{p^2 + y_1^2} > p_1$, daher ist von y_1 nur der Wert $-p + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$, von y_2 nur der Wert $+p + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$ zu brauchen.

Figur 121.



Mache in einer Hilfsfigur (Fig. 121) auf auf einer Geraden $OQ = q$, $OQ_1 = q_1$, errichte auf OQ in O das Lot, beschreibe um Q mit p einen Kreis, der das Lot in P trifft, und mache auf dem Lot $OP_1 = p_1$, ziehe QP und Q_1P_1. Trage auf QP von P aus die Strecke PO gegen Q hin nach X_2 und von Q abgewendet nach X_1, trage auf Q_1P_1 von P_1 aus die Strecke P_1O gegen Q_1 hin nach Y_1 und von Q_1 abgewendet nach Y_2, so ist:

$$QX_1 = x_1 = p + \sqrt{p^2 - q^2}$$

$$QX_2 = x_2 = p - \sqrt{p^2 - q^2}$$

$$Q_1Y_1 = y_1 = -p_1 + \sqrt{p_1^2 + q_1}$$

$$Q_1Y_2 = y_2 = +p_1 + \sqrt{p_1^2 + q_1^2}.$$

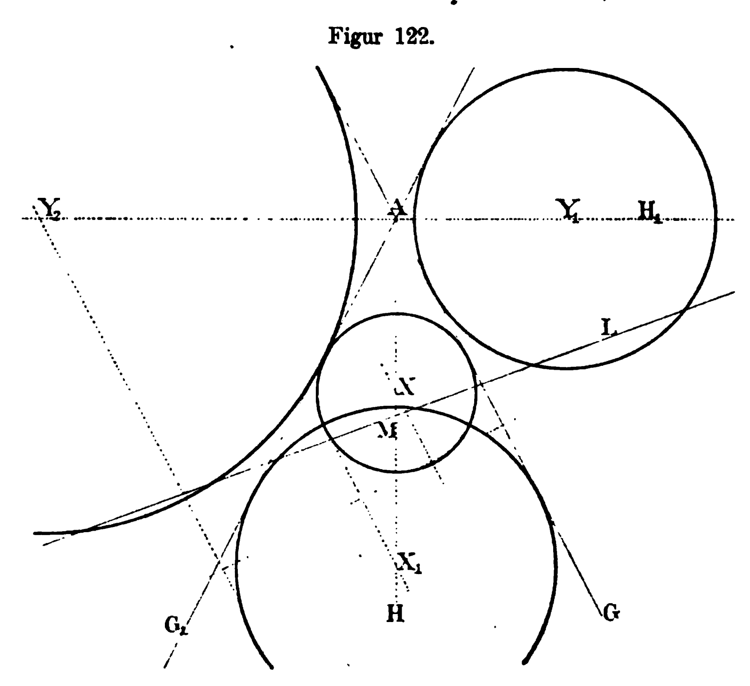
Denn in dem rechtwinkligen Dreieck POQ ist $PQ = p$, $OQ = q$, also $PO = \sqrt{p^2 - q^2}$, $QX_1 = PQ + PO$, $QX_2 = PQ - PO$:

in dem rechtwinkligen Dreieck $P_1 O Q_1$ ist $OQ_1 = q_1$, $OP_1 = p_1$, also $P_1 Q_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$, $QY_1 = P_1 Q_1 - P_1 O$, $QY_2 = P_1 Q_1 + P_1 O$.

III. Konstruktion der gesuchten Kreise.

Ziehe zu G Parallelen im Abstande x_1 und x_2 auf der Seite, auf welcher der Schnitt-

Figur 122.



punkt M der Halbierungsgeraden H mit L liegt. Diese schneiden die Gerade H in X_1 und X_2. Beschreibe um diese Punkte Kreise mit x_1 bezw. x_2. Ziehe ferner zu G auf der Seite von Punkt M eine Parallele im Abstande y_2 und auf der Seite von Punkt N eine Parallele im Abstande y_1. Diese schneiden die Halbierungsgerade H_1 in Y_2 und Y_1, beschreibe um diese Punkte Kreise mit den Halbmessern y_2 bezw. y_1. Diese vier Kreise sind die gesuchten.

Beweis folgt aus der Analysis.

Determination. Es gibt höchstens vier Lösungen, denn auf H können nur zwei Mittelpunkte liegen, da die Gleichung 16) nur die beiden Werte $x_1 = p \pm \sqrt{p^2 - q^2}$ liefert.

Aber auch auf H_1 können nur zwei Mittelpunkte liegen, denn von den vier Werten

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= +p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - q_1^2} \\ y_2 &= +p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - q_1^2} \end{aligned}\right\} \text{ für } h > k_1$$

und

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \\ y_2 &= +p_1 \pm \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \end{aligned}\right\} \text{ für } h < k_1$$

müssen immer zwei negativ sein. Im ersten Falle ist nämlich $\sqrt{p_1^2 - q_1^2}$ kleiner als p_1, folglich werden die beiden Werte von y_2 negativ, die beiden Werte von y_1 positiv; im zweiten Falle ist $\sqrt{p_1^2 + q_1^2}$ grösser als p_1, es wird also von y_1 und y_2 je ein Wert positiv und einer negativ.

Unbrauchbar ist jeder Wert des Halbmessers, welcher kleiner als $\frac{1}{2}s$ wird.

Anmerkung 39. Wenn $h > k$, so ist immer $h < k_1$ und umgekehrt.

Beweis. Da die Höhen eines Dreiecks sich umgekehrt wie die Seiten verhalten, so ist $h : k$ = AB : MB. Wenn also $h > k$, so ist AB > MB. Daher ist nach dem Satze: „Die grössere Seite hat den grösseren Gegenwinkel und umgekehrt": ∢ AMB > ∢ MAB. Aber ∢ AMB ist Winkel im rechtwinkligen Dreieck MAN, also = 90° — ∢ ANB. ∢ HAN im rechtwinkligen Dreieck AHN ist ebenfalls = 90° — ∢ ANB, folglich ist: ∢ AMB = ∢ HAN; also ∢ HAN > MAB. Subtrahiert man von beiden Winkeln den Winkel HAB, so erhält man ∢ BAN > ∢ MAH, aber ∢ MAH = 90° — HAN und ebenso ANB = 90° — HAN, also ∢ MAH = ∢ ANB, folglich ∢ BAN > ∢ ANB, daher im Dreieck ANB Seite BN > Seite AB, folglich Höhe AH < Höhe NK_1 oder $h < k_1$.

E. Unvollständig gelöste Aufgaben, welche mit Proportionen und algebraischer Analysis zu lösen sind.

Anmerkung 40. Die folgenden Aufgaben dieses Abschnitts lassen sich auf schon behandelte Aufgaben zurückführen oder mit Hilfe der abgeleiteten geometrischen Oerter oder nach Analogie mit behandelten Aufgaben leicht lösen; es wird deshalb meist nur die Analysis oder eine kurze Andeutung zur Lösung gegeben werden.

Aufgabe 102. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden je nach einer Sehne von gegebener (für beide Geraden gleicher) Länge schneidet und eine dritte Gerade berührt.

Gegeben: G, G_1, L, s.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Geraden G und G_1 sollen nach einer Sehne von der Länge $= 2s$ geschnitten, die Gerade L berührt werden. Da die Lote vom Mittelpunkt X auf beide Sehnen gleich sein müssen, so liegt X auf einer der Halbierungsgeraden der Winkel zwischen G und G_1.

(S. Erkl. 87.) Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.

(S. Erkl. 20.) Alle Punkte, welche von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand haben, liegen auf der Halbierungsgeraden.

Ist das Lot von X auf G = Xa, von X auf L = Xc, so ist:

$$\overline{Xa}^2 = \sqrt{x^2 - s^2}; \quad Xc = x,$$

folglich, wenn man die gleiche Bezeichnung wie bei Aufgabe 101 anwendet (siehe Fig. 119):

$$1). \ldots . \; u : \sqrt{x^2 - s^2} = m : k$$

$$2). \ldots . \; v : x = m : h$$

$$3). \ldots . \; u \pm v = m.$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie diejenigen von Aufgabe 101, nur dass h und k vertauscht ist.

Man hat also auch in der dort gegebenen Auflösung nur h mit k zu vertauschen.

Die Mittelpunkte auf der zweiten Winkelhalbierenden findet man durch eine analoge Gleichung.

Aufgabe 103. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden nach gleichen Sehnen von gegebener Länge schneidet und eine dritte Gerade nach einer Sehne von anderer gegebener Länge schneidet.

Gegeben: G, G_1, L, s, s_1.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Geraden G und G_1 sollen nach Sehnen von der Länge $2s$, die Gerade L nach der Sehne $2s_1$ geschnitten werden. Der Mittelpunkt X liegt nach Erkl. 86 und 20 auf einer der Halbierungsgeraden (z. B. H) von G und G_1. Es sei:

A = Schnittpunkt von G und G_1		siehe Figur 119;
B = „ „ G „ L		
M = „ „ H „ L		
AH = Lot von A auf L		
MK = „ „ M „ G		
Xa = „ „ X „ G		
Xc = „ „ X „ L_1		

so ist:

$$Xa = \sqrt{x^2 - s^2}$$

$$Xc = \sqrt{x^2 - s_1^2}$$

$$AX = u, \quad MX = v, \quad AM = m,$$

$$AX = h, \quad MK = k,$$

ferner:

Erkl. 99. In der nebenstehenden Entwicklung ist der Einfachheit halber nur der Fall berücksichtigt, dass der Mittelpunkt des gesuchten Kreises in dem von G, G_1, L gebildeten Dreieck liegt. Die anderen Kreise findet man auf analoge Art.

1). . . . $u:\sqrt{x^2-s^2} = m:k$

2). . . . $v:\sqrt{x^2-s_1^2} = m:h$

3). . . . $u+v = m.$

also:

$$u = \frac{m}{k}\sqrt{x^2-s^2}$$

$$v = \frac{m}{h}\sqrt{x^2-s_1^2}.$$

Dies in 3) eingesetzt, gibt nach Division mit m und Multiplikation mit hk:

4). $h\sqrt{x^2-s^2}+k\sqrt{x^2-s_1^2} = hk,$

oder wenn man quadriert:

Erkl. 100. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man die beiden Seiten quadriert.

$$h^2(x^2-s^2)+k^2(x^2-s_1^2)+ 2hk\sqrt{(x^2-s^2)(x^2-s_1^2)} = h^2k^2,$$

oder geordnet:

$$x^2(h^2+k^2)-(h^2s^2+k^2s_1^2+h^2k^2) = 2hk\sqrt{(x^2-s^2)(x^2-s_1^2)}.$$

Noch einmal quadriert:

Erkl. 101. Es ist:

$$(a+b)^2-4ab = (a-b)^2.$$

$$x^4(h^2+k^2)^2 - 2x^2(h^2+k^2)(h^2s^2+ k^2s_1^2+h^2k^2)+(h^2s^2+k^2s_1^2+h^2k^2)^2 = 4h^2k^2\left\{x^4-x^2(s^2+s_1^2)+s^2s_1^2\right\},$$

oder geordnet:

5). $x^4(h^2-k^2)^2-2x^2\left\{(h^2-k^2)(h^2s^2- k^2s_1^2)+h^2k^2(h^2+k^2)\right\}+(h^2s^2- k^2s_1)^2+2h^2k^2(h^2s^2+k^2s_1^2)+ h^4k^4 = 0.$

Diese quadratische Gleichung für x^2 lässt sich auflösen und daraus durch Wurzelausziehen der Wert von x finden. Allerdings ist die geometrische Konstruktion ziemlich umständlich.

Gleichung 5) kann man die Gestalt geben:

$$x^4-2x^2\left\{\frac{h^2s^2-k^2s_1^2}{h^2-k^2}+\frac{h^2k^2(h^2+k^2)}{(h^2-k^2)(h^2-k^2)}\right\} +\left(\frac{h^2s^2-k^2s_1^2}{h^2-k^2}\right)^2+\frac{2h^2k^2.(h^2s^2+k^2s_1^2)}{(h^2-k^2).(h^2-k^2)} +\frac{h^4k^4}{(h^2-k^2)^2} = 0.$$

Die einzelnen Bruchausdrücke lassen sich nach dem in Erkl. 94 ausgesprochenen Satze leicht bequemer umformen.

Aufgabe 104. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Geraden nach Sehnen von gleicher gegebener Länge schneidet.

Gegeben: G, G_1, G_2, s.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Da die drei Sehnen gleich lang sind, nach welchen die Geraden geschnitten werden sollen, so haben erstere gleichen Abstand vom Mittelpunkt. Ein zum gesuchten konzentrischer Kreis berührt daher die drei Sehnen, d. h. die drei gegebenen Geraden. Die Aufgabe ist zurückgeführt auf die Aufsuchung eines Kreises, der drei Geraden berührt.

Erkl. 102. Die Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei Geraden berührt, lässt vier Lösungen zu, nämlich den Inkreis und die drei Ankreise des aus den Geraden gebildeten Dreiecks (siehe *Müller*, Konstruktionsaufgaben).

Aufgabe 105. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis nach gleichen Sehnen von gegebener Länge schneidet.

Gegeben: G, G_1, Kreis um O, s.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Ein zu dem gesuchten konzentrischer Hilfskreis berührt die drei Schnittsehnen, weil diese gleiche Länge haben (siehe Erkl. 87). Die Schnittsehne mit dem gegebenen Kreis wird von einem zu diesem konzentrischen Kreise berührt, den man zeichnen kann, wenn man s beliebig in den Kreis O legt. Es liegt daher die Aufgabe vor: Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis berührt (siehe Aufgabe 91).

Aufgabe 106. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden nach gleichen Sehnen von gegebener Länge schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht.

Gegeben: G, G_1, P, s.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die gleichen Schnittsehnen des gesuchten Kreises mit G und G_1 haben gleichen Abstand von X (siehe Erkl. 87), folglich liegt X auf einer der Halbierungsgeraden der Winkel zwischen G und G_1 (siehe Erkl. 20). Diese ist somit Durchmesser des gesuchten Kreises. Wegen der Symmetrie des Kreises in Bezug auf jeden Durchmesser als Axe (siehe Erkl. 51) muss der gesuchte Kreis auch durch den Punkt Q gehen, welcher zu P symmetrisch gegen die Halbierungsgerade liegt. Es liegt demnach die Aufgabe vor: Einen Kreis zu zeichnen, der durch P und Q geht uud G nach der Sehne s schneidet (siehe Aufgabe 98).

(S. Erkl. 51.) Jeder Kreis ist symmetrisch in Bezug auf jeden Durchmesser als Axe.

Aufgabe 107. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Gegeben: P, G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Andeutung. Nach Erkl. 66 geht Kreis X noch durch einen zweiten Punkt auf PO. Es liegt daher die Aufgabe 82 vor.

Aufgabe 108. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis halbiert.

Gegeben: P, G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

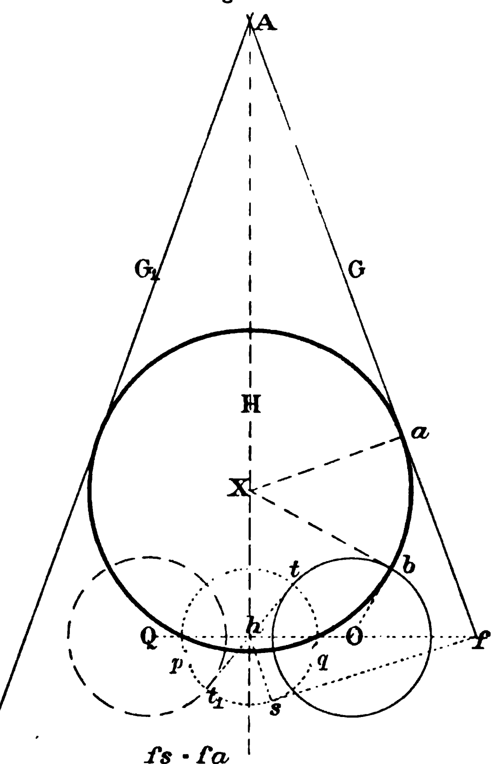
Andeutung. Nach Erkl. 76 kennt man einen geometrischen Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises bezw. noch einen zweiten Punkt, durch welchen derselbe gehen muss. Es liegt daher Aufgabe 82 vor.

Aufgabe 109. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Gegeben: G, G_1, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.


Figur 123.



Analysis. Der gesuchte Mittelpunkt X liegt auf einer der Halbierungsgeraden der Winkel zwischen G und G_1 (siehe Frage 15).

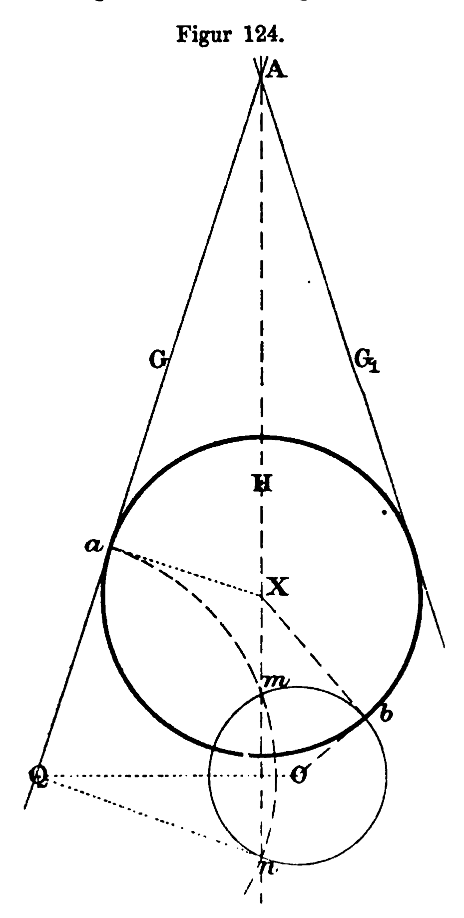
I. Fall. Der gegebene Kreis schneide die Halbierungsgerade nicht.

Der gesuchte Kreis (Fig. 123) muss auch denjenigen Hilfskreis (Mittelpunkt Q, Halbmesser *r*) rechtwinklig schneiden, welcher zu dem gegebenen in Bezug auf die Halbierungsgerade als Axe symmetrisch liegt (siehe Erkl. 51). Da die beiden Kreise O und Q nach Voraussetzung einander nicht schneiden, so geht der gesuchte Kreis durch zwei feste Punkte *p* und *q* ihrer Zentrale (siehe Erkl. 75), also liegt die Aufgabe vor: Einen Kreis durch zwei Punkte zu legen, welcher eine gegebene Gerade berührt.

(Zur Konstruktion ist Kreis Q nicht notwendig.)

Erkl. 103. In Fig. 123 ist die Konstruktion eines der gesuchten Kreise angedeutet.

Figur 124.



II. Fall. Der gegebene Kreis schneidet die Halbierungsgerade.

In diesem Falle würden die gegen die Halbierungsgerade als Axe symmetrischen Kreise einander auf der Halbierungsgeraden in den Punkten m und n (Fig. 124) schneiden. Für den gesuchten Kreis gibt es dann die zwei festen Punkte, durch welche er gehen müsste, nicht, dagegen schneidet er jeden andern rechtwinklig, welcher ebenfalls durch die Schnittpunkte m und n geht, also auch denjenigen Hilfskreis, der durch m und n geht und dessen Mittelpunkt Q auf G liegt. Schneidet dieser Hilfskreis die Gerade G in a, und errichtet man auf G in a das Lot aX bis zum Schnitt mit der Halbierungsgeraden, so ist

$$\overline{Xa}^2 = Xm . Xn$$

nach dem Tangentensatz, also nach dem gleichen Satze auch $= \overline{Xb}^2$, folglich X der gesuchte Mittelpunkt.

Aufgabe 110. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden berührt und einen gegebenen Kreis halbiert.

Gegeben: G, G_1, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

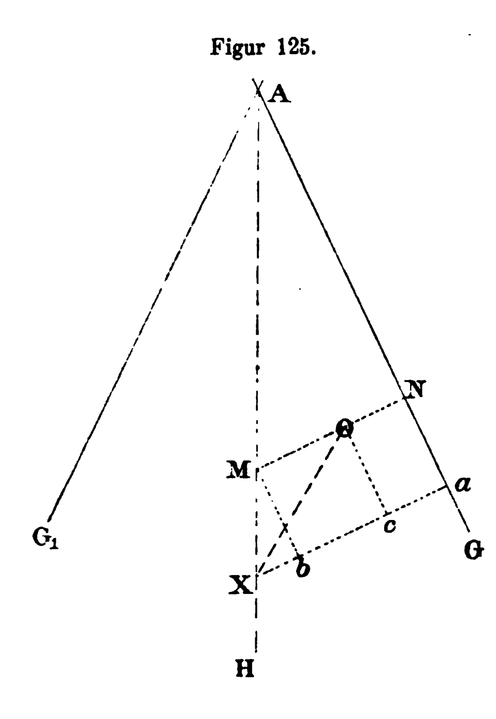
Andeutung. Der gesuchte Mittelpunkt liegt auf einer der Halbierungsgeraden der Winkel zwischen G und G_1 (siehe Frage 15), Kreis X halbiert auch denjenigen Kreis Q, welcher zu dem gegebenen Kreis O gegen die Halbierungsgerade als Axe symmetrisch liegt (siehe Erkl. 51), also muss der gesuchte Kreis nach Erkl. 78 durch zwei feste Punkte gehen, und es liegt Aufgabe 82 vor.

Aufgabe 111. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Geraden berührt und von einem gegebenen Kreis halbiert wird.

Gegeben: G, G_1, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 125.



Analysis. In Figur 125 sei A der Schnittpunkt von G und G_1, H die Halbierungsgerade eines der Winkel bei A, auf welcher X liegen muss (siehe Frage 15). Der Halbmesser Xa nach dem Berührungspunkt mit G sei x, der Halbmesser von Kreis $O = r$, so ist $XO = \sqrt{r^2 - x^2}$ (siehe Aufgabe 96). Durch O sei die Senkrechte zu G gezogen, welche H in M, G in N schneidet. Die Strecke MN sei $= m$, Strecke ON $= n$, Strecke AN $= l$, ferner seien Mb und Oc parallel G gezogen bis zum Schnitt mit Xa, so ist:

$$1). \ldots \; Xb : Mb = MN : AN,$$

$$Xb = x - MN = x - m,$$

$$Mb = Oc = \sqrt{\overline{OX}^2 - \overline{Xc}^2}$$
$$= \sqrt{\overline{OX}^2 - (Xa - ca)^2}$$
$$= \sqrt{\overline{OX}^2 - (Xa - ON)^2},$$

oder:

$$MB = \sqrt{r^2 - x^2 - (x - n)^2},$$

daher:

$$x - m : \sqrt{r^2 - n^2 - 2x^2 + 2nx} = m : l$$

oder:

$$x^2 - 2mx + m^2 : r^2 - n^2 - 2x^2 + 2nx = m^2 : l^2$$

oder:

$$2). \; x^2(l^2 + 2m^2) - 2x(ml^2 + m^2 n) + m^2 l^2 + m^2 n^2 - m^2 r^2 = 0.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung ist x zu berechnen und die Wurzeln geometrisch zu konstruieren.

Aufgabe 112 und **Aufgabe 113.** Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, einen gegebenen Kreis berührt und einen zweiten gegebenen Kreis entweder rechtwinklig schneidet oder halbiert.

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Andeutung. Unter Berücksichtigung der Erklärungen 66 und 76 führt man die vorliegende Aufgabe auf die Aufgabe 83 zurück.

Aufgabe 114. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt und einen

zweiten gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Aufgabe 115. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt und einen zweiten gegebenen Kreis halbiert.

Figur 126.

Gegeben: G, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Andeutung zu den Aufgaben 114 und 115. Der gesuchte Kreis X (Fig. 126) berühre die Gerade G in t, den Kreis O in s. Nach Erkl. 52 geht ts durch einen der Endpunkte a oder b des auf G senkrechten Durchmessers von Kreis O. Ziehe von a an Kreis X die Tangente ad, so ist nach dem Tangentensatz:

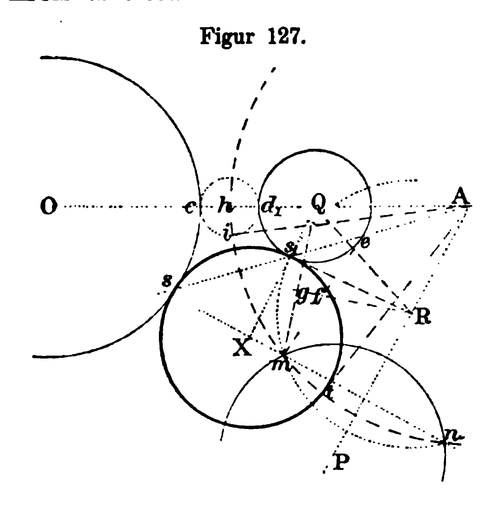
$$1). \; . \; . \quad \overline{ad}^2 = as \, . \, at = ab \, . \, af$$

(siehe Aufgabe 86), also ist ad bekannt. Ein Kreis um a mit ad schneidet den gesuchten rechtwinklig: daher kommt man auf die beiden Aufgaben: Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade berührt, einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet und einen zweiten gegebenen Kreis entweder rechtwinklig schneidet oder halbiert. Aus den beiden letzten Bedingungen erhält man einen geometrischen Ort für X nach Erkl. 73 und 83 und kann dann weiter nach Aufgabe 84 oder 92 verfahren.

Aufgabe 116. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt und einen dritten gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet oder:

Aufgabe 117. Einen dritten gegebenen Kreis halbiert.

Figur 127.



Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Kreise O und Q (Fig. 127) sollen von Kreis X berührt, Kreis P rechtwinklig geschnitten bezw. halbiert werden.

Es seien s und s_1 die Berührungspunkte, so geht nach Aufgabe 87 (siehe Erkl. 58 und 61) ss_1 durch einen der Aehnlichkeitspunkte der beiden gegebenen Kreise, und es ist (siehe Erkl. 59 und 62):

$$\mathrm{A}s \, . \, \mathrm{A}s_1 = \mathrm{A}c \, . \, \mathrm{A}d_1 .$$

Zieht man von A an den gesuchten Kreis die Tangente At, so ist At^2 = As.As nach dem Tangentensatz, folglich ist At mittlere Proportionale aus Ac und Ad_1. Ein Kreis um A mit At wird vom gesuchten Kreis rechtwinklig geschnitten. Es liegt daher die Aufgabe vor: Einen Kreis zu

zeichnen, welcher Kreis A rechtwinklig schneidet, Kreis P rechtwinklig schneidet bezw. halbiert und einen der Kreise O und Q berührt. Soll Kreis P entweder halbiert oder soll er rechtwinklig geschnitten werden in dem Falle, dass Kreis P und Kreis A einander nicht schneiden, so sind nach Erkl. 84 und 75 für den gesuchten Kreis zwei Punkte bekannt, durch welche er gehen muss, und man gelangt zu Aufgabe 83.

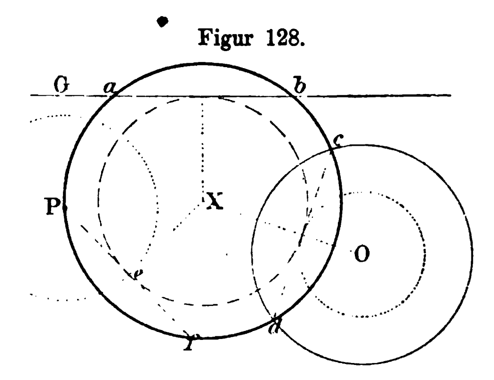
Schneidet dagegen Kreis P, wenn er vom gesuchten Kreis rechtwinklig geschnitten werden soll, den Hilfskreis um A in den Punkten m und n, so schneidet er nach Erkl. 73 auch jeden andern Kreis rechtwinklig, welcher durch m und n geht, unter anderen auch denjenigen Kreis R, welcher durch m und n geht und Kreis Q rechtwinklig schneidet, und welchen man nach Erkl. 66 und 68 zeichnen kann. Schneidet Kreis R den Kreis Q in s_1, so ist s_1 der gesuchte Berührungspunkt und der Schnittpunkt von $Q s_1$ mit $m n$ der gesuchte Mittelpunkt. Denn da Kreis R den Kreis Q in s_1 rechtwinklig schneidet, so ist $Q s_1$, also auch $X s_1$ Tangente an Kreis R, Kreis X schneidet somit Kreis R rechtwinklig und berührt Kreis Q. Da sein Mittelpunkt auf der Potenzlinie $m n$ von Kreis R und Kreis A liegt, so schneidet er auch Kreis A rechtwinklig, folglich ist $A t$ Tangente an ihn u. s. w. nach der Analysis.

Aufgabe 118. Einen Kreis zu zeichnen, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis nach gleichen Sehnen von gegebener Länge schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht.

Gegeben: P, G, Kreis um O, s.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 128.



Analysis. Kreis X (Fig. 128) schneide G nach Sehne $a b = s$, Kreis O nach Sehne $c d = s$, diese beiden Sehnen sind einander gleich, werden also von einem konzentrischen Kreis um X berührt (siehe Erkl. 87). Legt man an diesen von P aus die Tangente $P e$, welche den gesuchten Kreis in f schneidet, so ist nach Erkl. 87 $P f = s$, $P e = \frac{1}{2} s$. Ein Kreis um P mit $P e$ wird daher vom gesuchten Hilfskreis rechtwinklig geschnitten. Ein Kreis um O, welcher die Sehne $c d$ oder eine ihr gleiche innerhalb des Kreises O berührt, berührt auch den gesuchten Hilfskreis. Daher ist die Aufgabe auf die Aufgabe 114 zurückgeführt.

Aufgabe 119. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise nach gleichen Sehnen von gegebener Länge schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht.

Andeutung. Die Aufgabe lässt sich auf analoge Art wie Aufgabe 118 auf die Aufgabe 116 zurückführen.

Aufgabe 120. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt (andere Lösung von Aufgabe 93).

Andeutung. Analog wie bei Aufgabe 116 und 117 lässt sich ein Hilfskreis um einen der Aehnlichkeitspunkte von Kreis O und Kreis Q finden, welcher vom gesuchten Kreise rechtwinklig geschnitten wird. Ein zweiter Hilfskreis lässt sich ebenso um einen der Aehnlichkeitspunkte von Kreis Q und Kreis P konstruieren, der ebenfalls vom gesuchten Kreise rechtwinklig geschnitten wird. Damit liegt die Aufgabe vor: Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet und einen gegebenen Kreis berührt; eine Aufgabe, welche in der Analysis von Aufgabe 116 schon behandelt worden ist.

Aufgabe 121. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Die Potenzlinien von Kreis O und Kreis Q, von Kreis O und Kreis P, von Kreis Q und Kreis P schneiden einander in einem Punkte, dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises.

Aufgabe 122. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise halbiert.

Andeutung. Drei geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt erhält man aus Erkl. 77.

Aufgabe 123. Einen Kreis zu zeichnen, welcher von drei gegebenen Kreisen halbiert wird.

Andeutung. Nach Erkl. 82 müssen alle drei Kreise einander schneiden und der gemeinsame Schnittpunkt der drei Schnittsekanten ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Aufgabe 124. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, einen zweiten gegebenen Kreis halbiert und eine gegebene Gerade berührt.

Andeutung. Die Aufgabe führt mit Hilfe von Erkl. 84 auf die Aufgabe 82.

Aufgabe 125. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, von einem zweiten gegebenen Kreis halbiert wird und durch einen gegebenen Punkt geht.

Andeutung. Die Aufgabe ist unter Berücksichtigung von Erkl. 68 und 86 zu lösen.

Aufgabe 126. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis halbiert, von einem zweiten gegebenen Kreis halbiert wird und durch einen gegebenen Punkt geht.

Andeutung. Die Lösung der Aufgabe ist in Anmerkung 36 angedeutet.

Aufgabe 127. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise halbiert und eine gegebene Gerade berührt.

Andeutung. Die Aufgabe führt unter Anwendung von Erkl. 77 auf die Aufgabe 82.

Aufgabe 128. Einen Kreis zu zeichnen, welcher von zwei gegebenen Kreisen halbiert wird und eine gegebene Gerade berührt.

Andeutung. Die Aufgabe führt unter Anwendung von Erkl. 82 auf die Aufgabe 111.

Aufgabe 129. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet und einen dritten gegebenen Kreis halbiert.

Andeutung. Die Aufgabe führt unter Anwendung von Erkl. 84 auf den Umkreis eines Dreiecks.

Aufgabe 130. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet und von einem dritten gegebenen Kreis halbiert wird.

Andeutung. Erkl. 86 liefert zwei Kreise als geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt.

Probe: aus Erkl. 75 oder 73.

Aufgabe 131. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise halbiert und einen dritten gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Die Aufgabe führt unter zweimaliger Anwendung von Erkl. 84 auf den Umkreis eines Dreiecks.

Aufgabe 132. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise halbiert und von einem dritten gegebenen Kreis halbiert wird.

Andeutung. Erkl. 85 liefert zwei Kreise als geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt.

Probe: aus Erkl. 77.

Aufgabe 133. Einen Kreis zu zeichnen, welcher von zwei gegebenen Kreisen halbiert wird und einen dritten gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Andeutung. Erkl. 86 liefert zwei Kreise als geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt.

Probe: aus Erkl. 82.

Aufgabe 134. Einen Kreis zu zeichnen, welcher von zwei gegebenen Kreisen halbiert wird und einen dritten gegebenen Kreis halbiert.

Andeutung. Erkl. 85 liefert zwei Kreise als geometrische Oerter für den gesuchten Mittelpunkt.

Probe: aus Erkl. 82.

Aufgabe 135. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet und eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. I. Fall: Die beiden ersten Kreise schneiden einander nicht: Siehe Erkl. 75 und Aufgabe 98.

II. Fall: Die beiden ersten Kreise schneiden einander: Lege durch ihre Schnittpunkte einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, dieser wird von dem gesuchten rechtwinklig geschnitten (siehe Erkl. 73). Ist dann A dessen Mittelpunkt, r sein Halbmesser und h die Mitte der Sehne s, so ist:

$$r^2 = (\mathrm{A}h + \tfrac{1}{2}s)(\mathrm{A}h - \tfrac{1}{2}s),$$

woraus sich Ah finden lässt.

Aufgabe 136. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig und einen dritten gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. I. Fall: Die beiden ersten Kreise schneiden einander nicht: Siehe Erkl. 75 und Aufgabe 100.

II. Fall: Die beiden ersten Kreise schneiden einander: Lege durch ihre Schnittpunkte einen Kreis, welcher den dritten gegebenen Kreis rechtwinklig scheidet, und ziehe von seinem Mittelpunkt die Tangente an den zum dritten konzentrischen Kreis, welcher die Sehne von gegebener Länge berührt, so ist der Berührungspunkt Mitte der gesuchten Sehne (siehe Aufgabe 100).

Aufgabe 137. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise halbiert und eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. Siehe Erkl. 77 und Aufgabe 98.

Aufgabe 138. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise halbiert und einen dritten gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. Siehe Erkl. 77 und Aufgabe 100.

Aufgabe 139. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, einen zweiten gegebenen Kreis halbiert und eine gegebene Gerade nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

Andeutung. Siehe Erkl. 84 und Aufgabe 98.

Aufgabe 140. Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, einen zweiten gegebenen Kreis halbiert und einen dritten gegebenen Kreis nach einer Sehne von gegebener Länge schneidet.

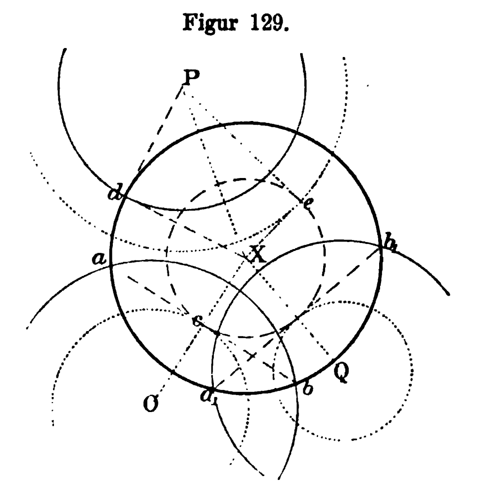
Andeutung. Siehe Erkl. 84 und Aufgabe 100.

Aufgabe 141. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise nach Sehnen von gleicher gegebener Länge und einen dritten gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P, s.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 129.



Analysis. Kreis X (Fig. 129) schneidet die Kreise O und Q nach der Sehne $ab = a_1b_1 = 2s$ und den Kreis P rechtwinklig in d; ein konzentrischer Hilfskreis um X, welcher ab und a_1b_1 berührt, berührt dann auch die leicht konstruierbaren konzentrischen Kreise zu den gegebenen (siehe Erkl. 87). Von P sei an den konzentrischen Hilfskreis die Tangente Pe gelegt, so ist

$$\overline{Pe}^2 = \overline{PX}^2 - \overline{Xe}^2 = \overline{Pd}^2 + \overline{Xd}^2 - \overline{Xe}^2$$

aber

$$Xd = Xa, \quad Xe = Xc,$$

folglich

$$\overline{Xd}^2 - \overline{Xe}^2 = \overline{Xa}^2 - \overline{Xc}^2 = \overline{ac}^2 = \tfrac{1}{4}s^2,$$

folglich ist Pe bekannt, und ein Kreis um P mit Pe wird von dem konzentrischen Hilfskreis rechtwinklig geschnitten; daher liegt Aufgabe 116 vor.

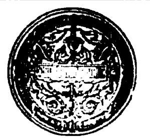
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

890. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 873. — Seite 129—144.
Mit 18 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 873. — Seite 129—144. Mit 18 Figuren.

Inhalt:

Allgemeine Lösung der Hauptaufgaben des Berührungsproblems durch Sätze der neueren Geometrie.

Stuttgart 1891.
Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

F. Allgemeine Lösung der Hauptaufgaben des Berührungsproblems durch Sätze der neueren Geometrie.

Anmerkung 41. In Abschnitt C wurde jede der zehn Hauptaufgaben des Berührungsproblems gesondert gelöst. Als Hilfsmittel zur Lösung dienten der Tangenten-Sekanten-Sehnensatz und der Satz vom Produkte der Abschnitte eines Aehnlichkeitsstrahls. Diese Methode, bei welcher von der einfacheren zur schwierigeren Aufgabe fortgeschritten und die letztere auf früher gelöste Aufgaben zurückgeführt wird, ist auch diejenige, mit welcher die alten Geometer, insbesondere *Apollonius* dieses Problem behandelten. Der neuen Geometrie ist es gelungen, durch Aufstellung einiger neuen Begriffe und Weiterentwicklung einiger schon den Alten bekannten Sätze die schwierigste Aufgabe, nämlich die Konstruktion des Berührungskreises zu drei gegebenen Kreisen, selbständig aufzulösen und dann die übrigen Aufgaben als Spezialfälle dieser Aufgabe zu behandeln.

Bevor an die Auflösung der allgemeinen Aufgabe gegangen wird, müssen die dazu nötigen Begriffe und Sätze der neueren Geometrie abgeleitet werden.

Frage 19. Durch welche Betrachtungsweise ist es möglich, sämtliche Hauptaufgaben des Berührungsproblems als spezielle Fälle einer einzigen Hauptaufgabe zu lösen?

Antwort. Man kann einen Punkt als Kreis von verschwindend kleinem Halbmesser, eine Gerade als Kreis von unbegrenzt grossem Halbmesser betrachten. Dann kommen alle Berührungsaufgaben darauf hinaus, an drei gegebene Kreise (von endlichem, verschwindend kleinem oder unbegrenzt grossem Halbmesser) einen Berührungskreis zu legen.

Frage 20. Welche Begriffe der neueren Geometrie sind zur Lösung der allgemeinen Aufgabe des Berührungsproblems nötig?

Antwort. Um die Aufgabe: „An drei gegebene Kreise einen Berührungskreis zu legen“, allgemein zu lösen, benützt die neuere Geometrie die Begriffe: Pol und Polare, Aehnlichkeitspunkt, Potenzlinie.

Die Potenzlinie und die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise waren schon den Alten bekannt (siehe *Klimpert*, Geschichte der Geometrie). Sätze über Aehnlichkeitspunkte siehe Erkl. 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63. Sätze über die Potenzlinie siehe Erkl. 68, 69, 70, 72, und Anmerkung 27, 28, 29, 30.

Frage 21. Was versteht man unter Pol und Polare eines Kreises?

Antwort. Wenn auf einem Halbmesser eines Kreises zwei Punkte so liegen, dass das Produkt ihrer Abstände

Erkl. 104. Sind P und Q die beiden reciproken Punkte, O der Mittelpunkt des Kreises und r sein Halbmesser, so ist:

$$OP \,.\, OQ = r^2.$$

Daraus folgt, dass der eine beider Punkte ausserhalb, der andere innerhalb des Kreises liegen muss, oder dass beide in einem Punkte des Kreises zusammenfallen.

Erkl. 105. Legt man durch zwei reciproke Punkte einen beliebigen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in c schneidet, so ist (siehe Fig. 131):

$$OP \,.\, OQ = \overline{Oc}^2.$$

Daraus folgt nach dem Tangentensatz, dass Oc Tangente an den beliebigen Kreis ist. Man erhält also den Satz:

Jeder Kreis, welcher durch zwei in Bezug auf einen gegebenen Kreis reciproke Punkte geht, schneidet den gegebenen Kreis rechtwinklig.

vom Mittelpunkt gleich dem Quadrat des Halbmessers ist, so nennt man die beiden Punkte konjugiert oder reciprok in Bezug auf den Kreis.

Zieht man durch den einen zweier reciproken Punkte die Senkrechte zu dem Halbmesser, der die Punkte trägt, so heisst diese Senkrechte die Polare des andern Punktes, und der letztere der Pol jener Senkrechten.

Liegt der Pol ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare den Kreis, liegt der Pol im Kreis, so liegt die Polare ausserhalb. Liegt der Pol auf dem Kreis, so berührt die Polare den Kreis, und der Pol ist Berührungspunkt (siehe Erkl. 104).

Frage 22. Welche Lehrsätze ergeben sich aus der Definition der reciproken Punkte und der Polaren?

Antwort. a). Aus der Definition der reciproken Punkte ergibt sich ausser dem in Erkl. 105 ausgesprochenen Satze noch der folgende:

Zwei reciproke Punkte teilen den Durchmesser, auf dem sie liegen, harmonisch; und umgekehrt: zwei harmonische Teilpunkte eines Durchmessers sind reciproke Punkte.

Beweis. Nach Voraussetzung ist (Fig. 130):

$$OP \,.\, OQ = r^2$$

oder:

$$OP : r = r : OQ,$$

also:

$$OP + r : OP - r = r + OQ : r - OQ$$

oder:

$$OP + Ob : OP - Oa = Ob + OQ : Ob - OQ$$

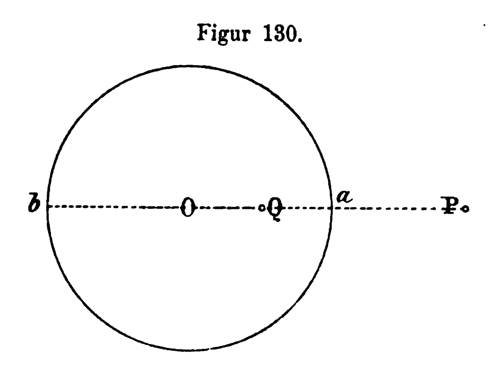
oder:

$$bP : aP = bQ : aQ.$$

Erkl. 106. Liegen auf einer Strecke ab und ihrer Verlängerung zwei Punkte c und d so, dass $ac : bc = ad : bd$, so sagt man: Die Punkte c, d liegen harmonisch zu a, b.

Erkl. 107. In jeder Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Differenz der Vorderglieder wie die Summe der Hinterglieder zur Differenz der Hinterglieder.

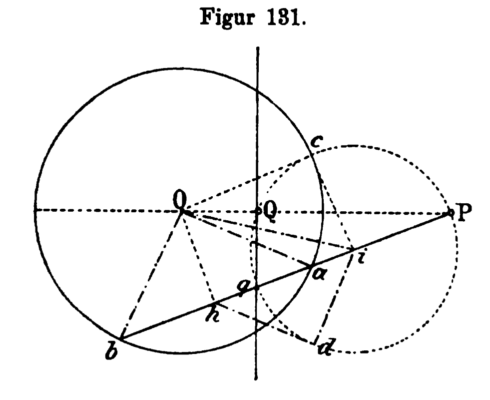
Figur 130.



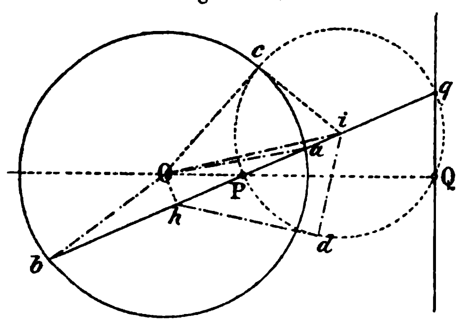
Aus der Definition von Pol und Polare sowie aus den Erkl. 105 und 106 folgen die weiteren Sätze:

b). Jede durch den Pol gehende Sehne wird von Pol und Polare harmonisch geteilt.

Figur 131.

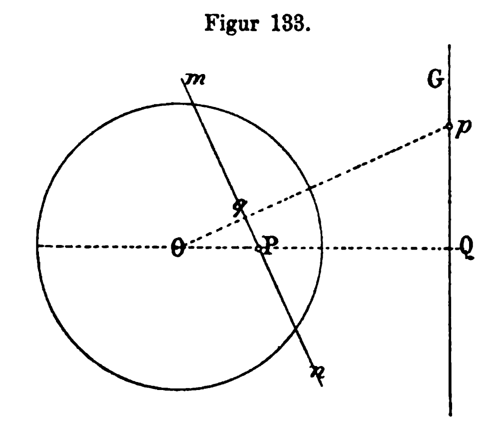


Figur 132.



Erkl 108. Aus dem nebenstehenden Satze folgt: Die Polare ist der geometrische Ort der zum Pol gehörigen vierten harmonischen Teilpunkte aller durch den Pol gehenden Sehnen.

Figur 133.



Beweis. Nach Erkl. 105 schneidet jeder durch P und Q (Fig. 131 und 132) gehende Kreis den gegebenen Kreis rechtwinklig, also auch der durch P, Q, q gehende. Der Schnittpunkt sei c. Die Mitte h der Sehne ab sei mit O verbunden und von h an den Hilfskreis die Tangente hd gezogen. Der Mittelpunkt i des Hilfskreises liegt nach Erkl. 50 auf Pq.

Nach dem Pythagoräer ist:

$$\overline{hd}^2 = \overline{hi}^2 - \overline{id}^2 = \overline{hi}^2 - \overline{ic}^2 =$$
$$(\overline{Oi}^2 - \overline{Oh}^2) - (\overline{Oi}^2 - \overline{Oc}^2) =$$
$$\overline{Oc}^2 - \overline{Oh}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{Oh}^2$$
$$= \overline{ah}^2 = \overline{bh}^2,$$

also:

1). . . . . $hd = ah = bh;$

andererseits ist nach dem Tangentensatz:

$$\overline{hd}^2 = h\mathrm{P}\,.\,hq$$

oder:

$$h\mathrm{P} : hd = hd : hq,$$

also nach Erkl. 107 und Gleichung 1):

$$h\mathrm{P} + hb : h\mathrm{P} - ha = hb + hq : ha - hq$$

oder:

2). . . . . $b\mathrm{P} : a\mathrm{P} = bq : aq,$

d. h. P und q teilen ab harmonisch (siehe Erkl. 106).

c). Bewegt sich der Pol auf einer Geraden, so dreht sich die Polare um den Pol dieser Geraden; und umgekehrt: Die Pole sämtlicher Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, liegen auf der Polaren dieses Punktes.

Beweis. P sei Pol von G, OPQ $\perp$ G, also:

1). . . . . . $\mathrm{OP}\,.\,\mathrm{OQ} = r^2.$

p liege auf G, also pQ $\perp$ OP. p sei Pol von mn und q Schnittpunkt von op mit mn, also:

2). . . . . . $\mathrm{O}p\,.\,\mathrm{O}q = r^2,$

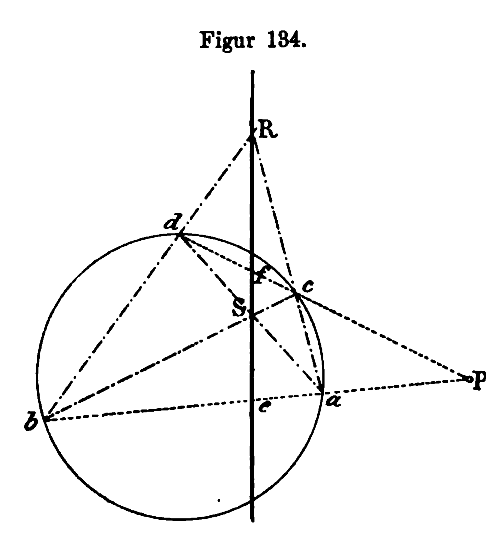
daher ist:

3). . . . $\mathrm{OP}\,.\,\mathrm{OQ} = \mathrm{O}p\,.\,\mathrm{O}q,$

folglich bilden nach Erkl. 45 die Punkte p, Q, P, q ein Kreisviereck. In diesem ist aber ∢ bei Q = 90°, folglich nach Erkl. 53 auch ∢ bei q = 90°, folglich geht mn, welche auf op in q senkrecht seht, durch P, w. z. b. w.

d). Zieht man durch einen Punkt mehrere Sekanten in einen Kreis und verbindet die Endpunkte der abgeschnittenen Sehnen, so schneiden die Verbindungsgeraden einander auf der Polare des Punktes.

Figur 134.



Beweis. Pab und Pcd seien zwei durch P gehende Sekanten, bd und ac schneiden einander in R, bc und ad schneiden einander in S, RS schneidet ab in e, cd in f.

Im Dreieck Rab, dessen Seiten von der Transversale Pd geschnitten werden, und im Dreieck Rcd, dessen Seiten von der Transversale Pb geschnitten werden, ist nach dem Lehrsatz des *Menelaus*:

1). . . $b\mathrm{P}.ac.\mathrm{R}d = a\mathrm{P}.\mathrm{R}c.bd$

2). . . $d\mathrm{P}.ac.\mathrm{R}b = c\mathrm{P}.\mathrm{R}a.bd.$

Im Dreieck Rab werden die Seiten von den durch den Punkt S gehenden Ecktransversalen Re, da, bc, in dem Dreieck Rcd werden die Seiten von den durch Punkt S gehenden Ecktransversalen Rf, da, cb geschnitten, daher ist nach dem Satze des *Ceva*:

3). . . $be.ac.\mathrm{R}d = ae.\mathrm{R}c.bd$

4). . . $df.ca.\mathrm{R}b = cf.\mathrm{R}a.bd.$

Dividiert man 1) durch 3) und 2 durch 4), so erhält man:

5). . . . . $b\mathrm{P}:be = a\mathrm{P}:ae$

und

6). . . . . $d\mathrm{P}:df = c\mathrm{P}:cf$

d. h. (siehe Erkl. 106):

Die Punkte P und f sind harmonische Teilpunkte der Sehne cd, die Punkte P und e sind harmonische Teilpunkte der Sehne ab, also ist die Verbindungsgerade von e und f, d. h. RS, Polare zu P (siehe Erkl. 108).

Erkl. 109. Der Lehrsatz des *Menelaus* heisst: Werden die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen durch eine Transversale geschnitten, so ist das Produkt von drei nicht aneinander stossenden Abschnitten gleich dem Produkt der drei andern nicht aneinander stossenden Abschnitte. (Siehe *Klimpert*, Geschichte der Geometrie, pag. 77.)

Erkl. 110. Der Lehrsatz des *Ceva* heisst: Schneiden sich drei Transversalen aus den Ecken eines Dreiecks in einem Punkt, so sind die beiden Produkte aus je drei getrennt liegenden Seitenabschnitten einander gleich. (Siehe *Klimpert*, Geschichte der Geometrie, pag. 149.)

Erkl. 111. Der nebenstehend bewiesene Satz wurde schon bei Aufgabe 84 benützt (siehe Erkl. 48).

Frage 23. Wie konstruiert man die Polare eines gegebenen Punktes und den Pol einer gegebenen Geraden?

Antwort. Liegt der Pol ausserhalb des gegebenen Kreises, so ist die Polare die Sehne zwischen den Berührungspunkten der Tangenten, welche man vom Pol an den Kreis ziehen kann (siehe Erkl. 50 und Erkl. 104). Liegt der Pol innerhalb, so schneiden sich auf seiner Polare die Tangentenpaare in den Endpunkten aller Sehnen, welche durch den Pol gezogen werden können (siehe Frage 22 c). Mit Hilfe dieser Bemerkungen lassen sich die Polare eines gegebenen Pols und der Pol einer gegebenen Polare leicht zeichnen.

Satz d) von Frage 22 erlaubt jedoch die Zeichnung der Polare zu gegebenem Pol und des Pols zu gegebener Polare, einerlei ob der Pol (die Polare) ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt, mit alleiniger Anwendung des Lineals. Man verfährt dabei ganz nach Fig. 134.

a). Pol P gegeben: Ziehe durch den Pol zwei beliebige Sehnen Pab und Pcd und verbinde deren Endpunkte. Verbinde die zwei Schnittpunkte R und S der Verbindungsgeraden, die Verbindungsgerade ist die gesuchte Polare.

b). Polare RS gegeben: Ziehe durch einen beliebigen Punkt R der Polaren zwei Sehnen ab, bc, und verbinde ihre Endpunkte. Das eine Paar von Verbindungsgeraden schneidet sich auf der Polaren in R, das andere im gesuchten Pol P.

Frage 24. Was versteht man unter der Potenzlinie zweier Kreise?

Antwort. Die Potenzlinie zweier Kreise ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenz haben (siehe Erkl. 43 und 54). Dieser geometrische Ort ist eine auf der Zentrale beider Kreise senkrechte Gerade, welche bei Kreisen, die einander schneiden, mit der Schnittsekante zusammenfällt, wenn die Kreise auseinanderliegen, zwischen denselben hindurchgeht, und zwar durch die Mittelpunkte der gemeinsamen Tangenten.

Wenn die Kreise einander berühren,

so ist die Potenzlinie die Tangente im Berührungspunkt

Liegt der kleinere Kreis im grösseren, so schneidet die Potenzlinie keinen der Kreise.

Sind die Kreise konzentrisch, so fällt die Potenzlinie in unendliche Entfernung (s. Anmerkung 27, 28, 29 und Erkl. 112.)

Erkl. 112. Sind O und Q die Mittelpunkte, r und r_1 die Halbmesser der beiden Kreise, so besteht für jeden Punkt X der Potenzlinie die Gleichung:

$$XO^2 - XQ^2 = r^2 - r_1^2.$$

Frage 25. Wie wird die Zentrale durch die Potenzlinie geteilt?

Antwort. Wenn man diejenigen Punkte, in welchen die Kreise durch ihre gemeinsame Zentrale geschnitten werden, als ihre Scheitel bezeichnet, und zwar die vom Mittelpunkte aus nach gleicher Richtung hin gesehenen Scheitel als gleichnamige, die andern als ungleichnamige, so kann man folgende Sätze aussprechen:

a). Jede Strecke zwischen zwei ungleichnamigen Scheiteln wird von der Potenzlinie in zwei Abschnitte geteilt, die sich verhalten wie die Strecken zwischen den gleichnamigen Scheiteln.

b). Jede Strecke zwischen zwei gleichnamigen Scheiteln wird von der Potenzlinie in zwei Abschnitte geteilt, die sich verhalten wie die Strecken zwischen den ungleichnamigen Scheiteln.

Figur 135.

(S. Erkl. 94.) In jeder Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie zwei homologe Glieder.

Beweis I. Ist P der Schnittpunkt von Potenzlinie und Zentrale, so ist, da P gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise hat:

$$Pa \cdot Pb = Pa_1 \cdot Pb_1$$

oder

$$Pa : Pa_1 = Pb_1 : Pb,$$

also

$$Pa + Pa_1 : Pb + Pb_1 = Pa : Pb_1 = Pa_1 : Pb$$

oder

$$\left. \begin{matrix} Pa : Pb_1 \\ Pa_1 : Pb \end{matrix} \right\} = aa_1 : bb_1.$$

Beweis II. Da

$$Pa \cdot Pb = Pa_1 \cdot Pb_1,$$

so ist

$$Pa : Pb_1 = Pa_1 : Pb,$$

oder

$$Pa + Pb_1 : Pa_1 + Pb = Pa : Pa_1$$
$$= Pb_1 : Pb$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} Pa : Pa_1 \\ Pb_1 : Pb \end{array}\right\} = ab_1 : a_1 b.$$

Frage 26. Welche wichtigen Begriffe ergeben sich aus dem Umstande, dass zwei Kreise ähnliche Figuren sind?

Erkl. 113. Die nebenstehenden Definitionen und Lehrsätze sind schon in Erkl. 57, 58, 60 enthalten.

Antwort. a). Da zwei Kreise ähnliche Figuren in ähnlicher Lage sind (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrbuch der Planimetrie), so verhalten sich parallele Halbmesser, parallele Durchmesser, parallele Tangentenpaare und die zugehörigen Berührungssehnen, ferner die Sehnen, welche die Endpunkte paralleler Halbmesser verbinden, wie die Halbmesser der Kreise.

b). Verbindet man die Endpunkte paralleler, nach gleichen Seiten gerichteter Halbmesser, so geht die Verbindungsgerade durch einen festen Punkt der Zentrale, den äusseren Aehnlichkeitspunkt. Verbindet man die Endpunkte paralleler, entgegengesetzt gerichteter Halbmesser, so geht die Verbindungsgerade durch einen festen Punkt der Zentrale, den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Beide Aehnlichkeitspunkte teilen die Zentrale aussen und innen (harmonisch) im Verhältnis der Halbmesser.

Bei Kreisen, welche einander von aussen (von innen) berühren, ist der Berührungspunkt innerer (äusserer) Aehnlichkeitspunkt.

c). Jede Gerade, welche durch einen der Aehnlichkeitspunkte geht, heisst Aehnlichkeitsstrahl.

Wenn ein Aehnlichkeitsstrahl die Kreise schneidet, so teilt er sie in ähnliche Bögen.

Die gemeinsamen Tangenten sind ebenfalls Aehnlichkeitsstrahlen.

d). Die Punkte, in welchen ein Aehnlichkeitsstrahl parallele Durchmesser schneidet, nennt man homologe Punkte; zwei Geraden heissen homolog, wenn sie parallel sind und durch homologe Punkte gehen.

Die Verbindungsgeraden (-strecken) homologer Punktepaare sind homologe

Geraden (Strecken), die Schnittpunkte homologer Geraden sind homologe Punkte.

Homologe Strecken verhalten sich wie die Halbmesser.

Die Abstände homologer Punkte vom Aehnlichkeitspunkt verhalten sich wie die Halbmesser.

Homologe Strecken werden von einem Aehnlichkeitsstrahl nach gleichem Verhältnis geteilt, und umgekehrt: Die Punkte, welche homologe Strecken im gleichen Verhältnis teilen, sind homologe Punkte.

Gleichnamige Scheitel sind homologe Punkte des äusseren, ungleichnamige Scheitel sind homologe Punkte des inneren Aehnlichkeitspunkts.

Erkl. 114. Die Beweise der nebenstehenden Sätze ergeben sich aus der Aehnlichkeit der beiden Kreise, in welchen sich je zwei entsprechende Stücke verhalten wie die Halbmesser.

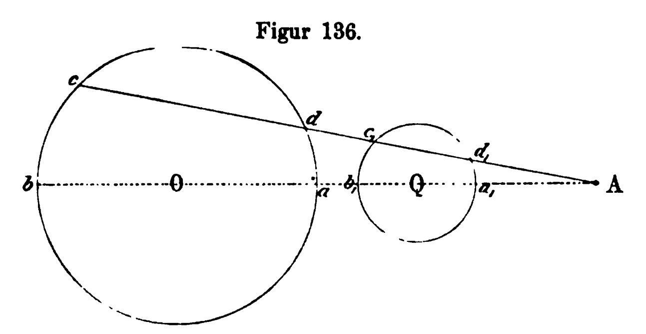
Frage 27. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Abschnitten eines Aehnlichkeitsstrahls?

Antwort. Wenn ein Aehnlichkeitsstrahl die beiden Kreise schneidet, so ist je ein Schnittpunkt auf dem einen Kreise homolog zu einem Schnittpunkt auf dem andern Kreis. Es gibt also auf jedem Aehnlichkeitsstrahl zwei Paare homologer und zwei Paare nicht homologer Schnittpunkte.

Das Produkt der Abstände zweier nicht homologen Schnittpunkte vom Aehnlichkeitspunkt ist gleich dem Produkt der Abstände der beiden andern nicht homologen Punkte vom Aehnlichkeitspunkt. Diese Produkte sind für jeden Aehnlichkeitsstrahl konstant und zwar gleich dem Produkt zweier nicht homologen Scheitel vom Aehnlichkeitspunkt.

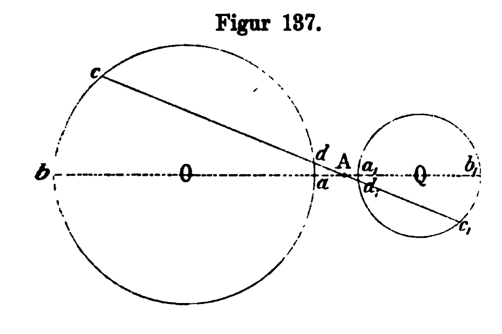
Erkl. 115. Der nebenstehende Satz ist in der Analysis zu Aufgabe 87 bewiesen (siehe Erkl. 59 und 62).

Figur 136.



In Fig. 136 und 137 ist also, wenn A den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt, a, a_1; b, b_1 homologe Paare von Scheiteln, c, c_1; d, d_1 homologe

Figur 137.



Paare von Schnittpunkten eines Aehnlichkeitsstrahls mit den Kreisen bedeuten:

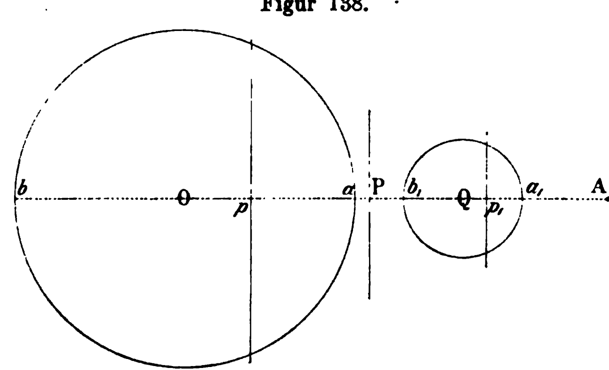
$$Ac \,.\, Ad_1 = Ac_1 \,.\, Ad = Aa \,.\, Ab_1 = Aa_1 \,.\, Ab.$$

Diese konstanten Produkte der Abschnitte eines Aehnlichkeitsstrahls nennt man die **gemeinschaftliche Potenz der zwei Kreise in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt.** Diese gemeinschaftliche Potenz nennt man **äussere,** wenn sie sich auf den äusseren, **innere,** wenn sie sich auf den inneren Aehnlichkeitspunkt bezieht.

Frage 28. Bestehen zwischen Aehnlichkeitspunkt, Potenzlinie und Polaren einfache Beziehungen und welche?

Antwort. Ist A der (äussere oder innere) Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise O und Q; sind a und a_1, b und b_1 ho-

Figur 138.



mologe Scheitel der Kreise, p und p_1 die Schnittpunkte der Zentrale mit den Polaren des Aehnlichkeitspunkts in beiden Kreisen, P der Schnitt der Potenzlinie mit der Zentrale, so ist (Fig. 138 u. 139):

$$ap : bp = a_1 p_1 : b_1 p_1 = a\mathrm{P} : b_1 \mathrm{P} = a_1 \mathrm{P} : b\mathrm{P}$$

oder:

Die Abschnitte, in welche der Durchmesser jedes Kreises durch seine Polare des (äusseren oder inneren) Aehnlichkeitspunkts geteilt wird, verhalten sich wie die Strecken, in welche der Abstand zweier nicht homologen Scheitel durch die Potenzlinie geteilt wird.

Figur 139.

Beweis. Die beiden Sätze a) und b) in der Antwort zu Frage 25 lassen sich

unter Berücksichtigung des in der Antwort d) zu Frage 26 berührten Umstandes, dass nämlich für den äusseren Aehnlichkeitspunkt die gleichnamigen, für den inneren Aehnlichkeitspunkt die ungleichnamigen Scheitel homologe Punkte sind, in einen einzigen zusammenziehen. Man muss dabei nur für den inneren Aehnlichkeitspunkt die Punkte a_1 und b_1 vertauschen. Es ist also

Erkl. 116. Die Sätze a) und b) in der Antwort zu Frage 25 lauten:

Die Abschnitte jeder Strecke zwischen zwei nicht homologen Scheiteln, in welche sie durch die Potenzlinie geteilt wird, verhalten sich wie die Strecken zwischen beiden Paaren homologer Scheitel.

1). $a\mathrm{P} : b_1\mathrm{P} = a_1\mathrm{P} : b\mathrm{P} = aa_1 : bb_1$.

Nun sind aber die Polaren des Aehnlichkeitspunkts homologe Geraden in beiden Kreisen, also die Punkte p und p_1 homologe Punkte; sie teilen daher die Durchmesser nach dem gleichen Verhältnis und es ist:

2). . . . $ap : bp = a_1p_1 : b_1p_1$.

Ihre Abstände vom Aehnlichkeitspunkt sind ebenfalls proportioniert, also:

(S. Erkl. 94.) In jeder Proportion verhält sich die Differenz der Vorderglieder zur Differenz der Hinterglieder wie ein Paar homologer Glieder.

$$\mathrm{A}a : \mathrm{A}a_1 = \mathrm{A}b : \mathrm{A}b_1,$$

oder

$$\mathrm{A}a - \mathrm{A}a_1 : \mathrm{A}b - \mathrm{A}b_1 = \mathrm{A}a : \mathrm{A}b = \mathrm{A}a_1 : \mathrm{A}b_1$$

oder

3). $aa_1 : bb_1 = \mathrm{A}a : \mathrm{A}b = \mathrm{A}a_1 : \mathrm{A}b_1$.

Da Pol und Polare den Durchmesser harmonisch teilen (siehe die Antwort b) zu Frage 22), so ist:

4). . . $\begin{cases} ap : bp = \mathrm{A}a : \mathrm{A}b \\ ap_1 : bp_1 = \mathrm{A}a_1 : \mathrm{A}b_1, \end{cases}$

aus 3) und 4) folgt:

5). $ap : bp = a_1p_1 : b_1p_1 = aa_1 : bb_1$,

aus 1) und 5) folgt dann:

6). $\begin{Bmatrix} ap : bp \\ = a_1p_1 : b_1p_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\mathrm{P} : b_1\mathrm{P} \\ = a_1\mathrm{P} : b\mathrm{P} \end{Bmatrix}$

Aufgabe 142. Die Polaren der Aehnlichkeitspunkte und die Potenzlinie für zwei Kreise gleichzeitig zu zeichnen.

Gegeben: Kreise um O und Q.

Gesucht: Potenzlinie fg und die Polaren ep und e_1p_1 des äusseren (Fig. 140) und inneren (Fig. 141) Aehnlichkeitspunkts.

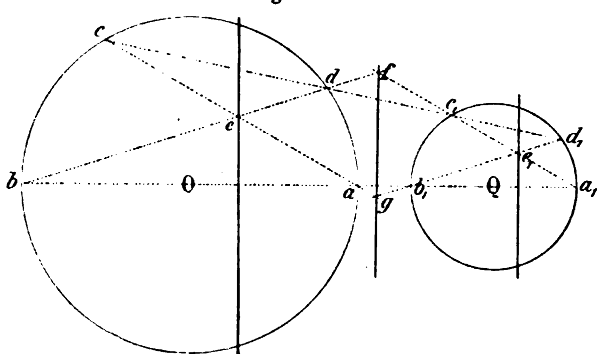
Erkl. 117. Die nebenstehende Konstruktion erfordert nicht die Anwendung des Zirkels, nur die einmalige Ziehung zweier Parallelen, alles Uebrige geschieht mit dem Lineal allein.

Konstruktion. Ziehe durch die homologen Scheitel a und a_1 (in Fig. 140 gleichnamig, in Fig. 141 ungleichnamig) zwei beliebige, parallele Sehnen $ac \parallel a_1c_1$, ziehe cc_1, welche Kreis O in d, Kreis Q in d_1 trifft, ziehe bd und b_1d_1.

ac und bd schneiden einander in e
a_1c_1 „ b_1d_1 „ „ „ e_1
a_1c_1 „ bd „ „ „ f
ac „ b_1d_1 „ „ „ g.

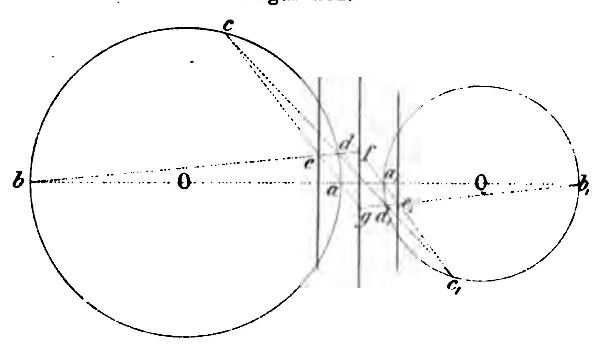
Die Senkrechten durch e und e_1 zur Zentrale sind die Polaren des (äusseren in Fig. 140, inneren in Fig. 141) Aehnlichkeitspunkts, fg ist die Potenzlinie beider Kreise.

Figur 140.



Beweis. Da $ac \parallel a_1c_1$, so sind c und c_1 homologe Punkte, also cc_1 Aehnlichkeitsstrahl, folglich d und d_1 homologe Punkte,

Figur 141.



daher bd und b_1d_1 homologe Geraden und e und e_1 homologe Punkte. Nach Frage 22, Antwort d), ist e ein Punkt der Polare des Schnittpunkts von ab und cd, folglich ep Polare dieses Schnittpunkts, d. h. des Aehnlichkeitspunkts, ebenso e_1p_1 Polare des Aehnlichkeitspunkts im Kreis Q.

Es ist nach Konstruktion:

$$fc_1 \parallel ac,$$

folglich:

$$\sphericalangle fc_1 d = \sphericalangle acd$$

als Wechselwinkel bei Parallelen,

$$\sphericalangle acd = \sphericalangle dba$$

als Peripheriewinkel über Bogen ad, folglich:

$$\sphericalangle fc_1 d = \sphericalangle fba_1,$$

daher die Dreiecke fdc_1 und $fa_1 b$ ähnlich, also:

$$fc_1 : fd = fb \,.\, fa_1,$$

oder:

$$fc_1 \,.\, fa_1 = fb \,.\, fd.$$

Punkt f hat also gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise. Ebenso findet man, dass

$$\triangle\, gab_1 \sim \triangle\, gd_1 c$$

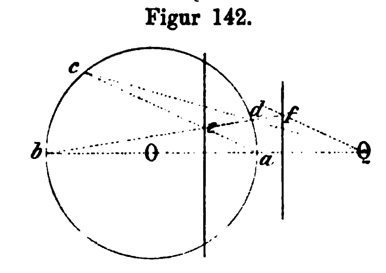
ist, also:

$$gb_1 \,.\, gd_1 = ga \,.\, gc,$$

folglich hat auch g gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise, daher ist fg Potenzlinie.

Anmerkung 42. Die in Aufgabe 151 gezeigte Konstruktion ist auch in dem Falle anwendbar, dass der Kreis Q in einen Punkt ausartet.

Figur 142.



Ziehe QO, welche den Kreis in a und b schneidet, ziehe beliebig Sehne ac und die Parallele dazu durch Q, ziehe Qc, welche den Kreis in d schneidet. Ziehe bd, welche ac in e und die Parallele in f schneidet. Ziehe durch e und f Senkrechten zur Zentrale von Q.

Der Beweis ergibt sich aus demjenigen der vorigen Aufgabe.

Frage 29. Was wird aus Aehnlichkeitspunkt, Potenzlinie, Polare, wenn die Kreise in Punkte oder Geraden ausarten?

Antwort. a). Die Aehnlichkeitspunkte zwischen einem Punkt und einem Kreis fallen mit dem Punkt zusammen.

Die Aehnlichkeitspunkte zwischen einem Kreis und einer Geraden sind die Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers.

Die Aehnlichkeitspunkte zwischen einem Punkt und einer Geraden fallen mit dem Punkt zusammen.

Der innere Aehnlichkeitspunkt zwischen zwei Punkten ist die Mitte der Verbindungsstrecke, der äussere Aehnlichkeits-

punkt ist ein unendlich entfernter Punkt auf der Verbindungsgeraden.

Die Aehnlichkeitspunkte zwischen zwei Geraden sind unbestimmt.

b). Die Potenzlinie zwischen einem Punkt und einem Kreis halbiert den Abstand zwischen dem Punkt und seiner Polaren in Bezug auf den Kreis (siehe Erkl. 70 und Frage 23).

Die Potenzlinie zwischen zwei Punkten ist das Mittellot ihrer Verbindungsstrecke.

Die Potenzlinie zwischen einem Punkt und einer Geraden ist die Gerade selbst.

Die Potenzlinie zwischen zwei Geraden ist eine der Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den gegebenen Geraden.

Die Potenzlinie zwischen einem Kreis und einer Geraden ist die Gerade selbst.

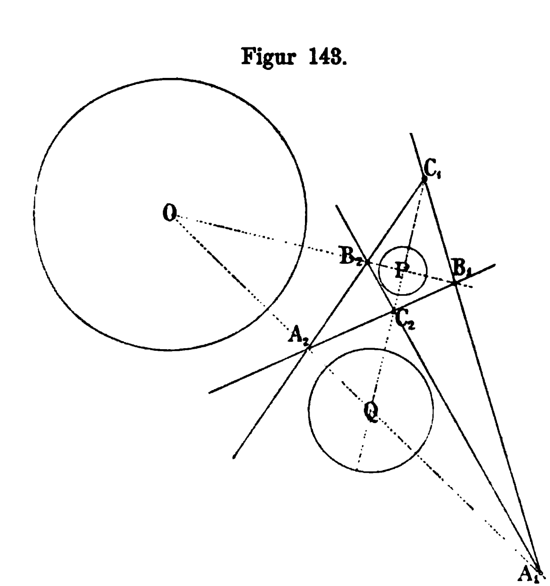
c). Die Polare eines Punkts in Bezug auf eine Gerade ist die letztere selbst.

Der Pol einer Geraden in Bezug auf einen Punkt ist dieser selbst.

Der Pol einer Geraden in Bezug auf eine Gerade ist unbestimmt.

Frage 30. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Aehnlichkeitspunkten von drei Kreisen?

Figur 143.



Antwort. Werden drei Kreise auf alle Weise paarweise verbunden, so erhält man drei äussere und drei innere Aehnlichkeitspunkte. Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden; je zwei innere und ein äusserer Aehnlichkeitspunkt liegen auf einer Geraden.

Die vier Geraden, auf denen je drei Aehnlichkeitspunkte liegen, heissen Aehnlichkeitsaxen.

Drei Kreise haben vier Aehnlichkeitsaxen, eine äussere und drei innere.

Beweis. Sind r_1, r_2, r_3 die Halbmesser der drei Kreise O, Q, P (Fig. 143), A_1 und A_2 der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt von O und Q, ebenso B_1 und B_2 von O und P, C_1 und C_2 von Q und P, so ist nach Antwort b) zu Frage 26:

$$OA_1 : QA_1 = OA_2 : QA_2 = r_1 : r_2$$
$$OB_1 : PB_1 = OB_2 : PB_2 = r_1 : r_3$$
$$QC_1 : PC_1 = QC_2 : PC_2 = r_2 : r_3,$$

daher:

$$\frac{OA_1 \cdot QC_1 \cdot PB_1}{QA_1 \cdot PC_1 \cdot OB_1} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_3 \cdot r_1} = 1,$$

also

$$OA_1 \cdot QC_1 \cdot PB_1 = QA_1 \cdot PC_1 \cdot OB_1,$$

ebenso findet man

$$OA_2 \cdot QC_1 \cdot PB_2 = QA_2 \cdot PC_1 \cdot OB_2$$

$$OA_2 \cdot QC_2 \cdot PB_1 = QA_2 \cdot PC_2 \cdot OB_1$$

$$OA_1 \cdot QC_2 \cdot PB_2 = QA_1 \cdot PC_2 \cdot OB_2,$$

es liegen daher nach der Umkehrung des Satzes von *Menelaus* die drei Punkte

$A_1\ B_1\ C_1$
$A_2\ B_2\ C_1$ je in einer
$A_2\ B_1\ C_2$ Geraden.
$A_1\ B_2\ C_2$

Erkl. 118. Die Umkehrung des Satzes von *Menelaus* heisst: Liegen auf den Seiten eines Dreiecks oder ihren Verlängerungen drei Punkte so, dass die Produkte dreier nicht benachbarten Abschnitte gleich den Produkten der drei andern Seitenabschnitte ist, so liegen die drei Punkte in einer Geraden.

Frage 31. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Potenzlinien dreier Kreise?

Antwort. Werden zwischen je zweien von drei Kreisen die Potenzlinien konstruiert, so gehen dieselben durch einen Punkt, den Potenzpunkt der drei Kreise.

Beweis. Jeder Punkt der Potenzlinie der Kreise O und Q hat gleiche Potenz für diese Kreise, jeder Punkt der Potenzlinie von O und P hat gleiche Potenz für die Kreise O und P, folglich hat der Schnittpunkt beider Potenzlinien gleiche Potenz für die Kreise Q und P, da aber die Potenzlinie der Kreise Q und P der geometrische Ort aller Punkte gleicher Potenz für die Kreise Q und P ist, so muss sie durch jenen Schnittpunkt der beiden ersten Potenzlinien hindurchgehen.

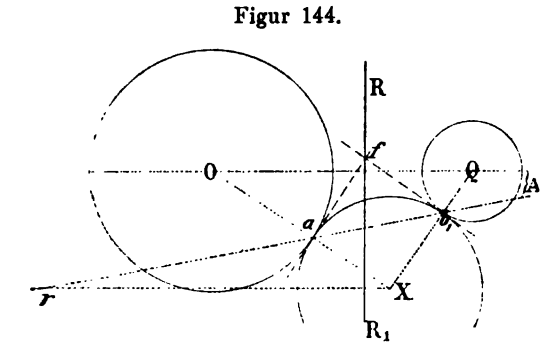
Frage 32. Welche Beziehungen bestehen zwischen Aehnlichkeitspunkt, Potenzlinie, Polaren der Aehnlichkeitspunkte von zwei Kreisen und einem gemeinsamen Berührungskreis?

Antwort. a). Werden zwei Kreise von einem dritten Kreise gleichartig oder ungleichartig berührt, so ist die Sehne zwischen den Berührungspunkten äusserer oder innerer Aehnlichkeitsstrahl der zwei ersten Kreise.

Beweis siehe Analysis zu Aufgabe 87, vgl. Erkl. 58 und 61.

b). Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, so liegt der Pol der Potenzlinie der zwei ersten Kreise in Bezug auf den dritten auf der Berührungssehne.

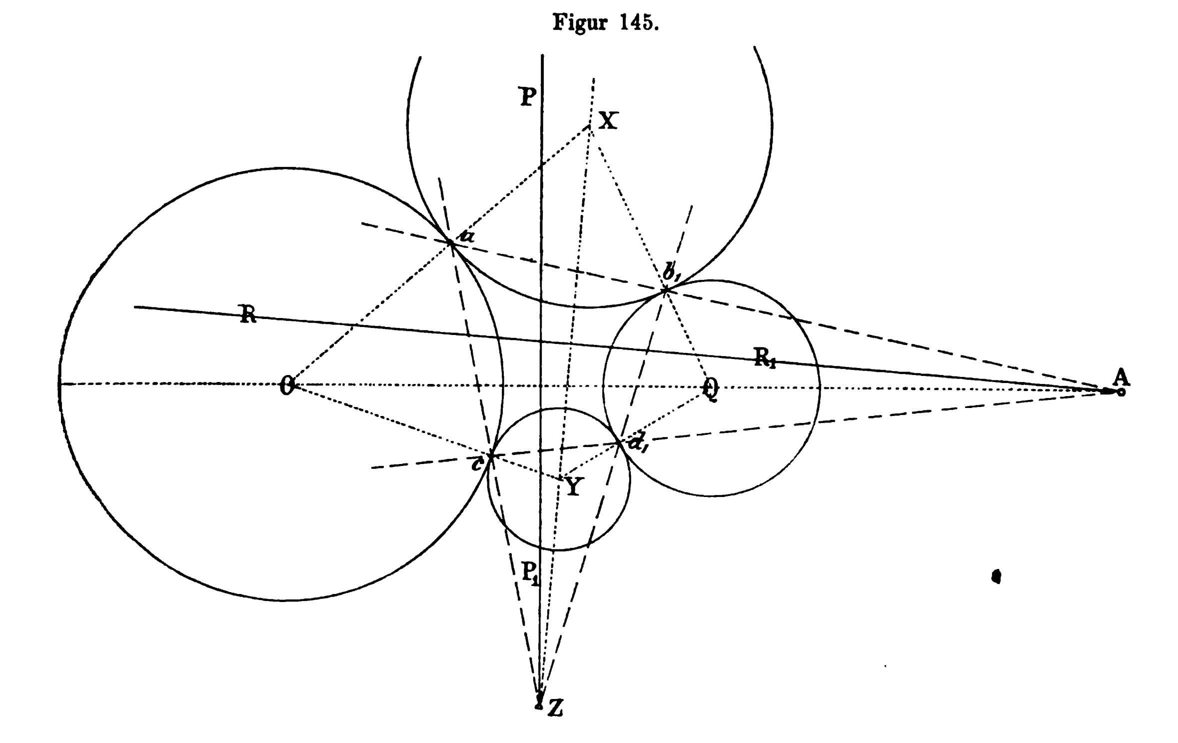
Figur 144.



Beweis. In Fig. 144 ist ab_1 die Berührungssehne, RR_1 die Potenzlinie der Kreise O und Q, r deren Pol in Bezug auf Kreis X. Ziehe die Tangenten af und $b_1 f$, so sind dieselben einander gleich, also hat f gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise O und Q, liegt also auf RR_1. Da nun ab_1 Polare von f, d. h. von einem Punkte der RR_1 ist (siehe Frage 23), so liegt der Pol von RR_1 auf ab_1 (siehe Frage 22, Antwort c).

c). Werden zwei Kreise von zwei andern beide gleichartig (oder beide ungleichartig) berührt, so ist die Potenzlinie des einen Kreispaares ein äusserer (oder innerer) Aehnlichkeitsstrahl des andern Kreispaares.

Figur 145.



Beweis. Nach Satz a) gehen die Berührungssehnen ab_1 und cd_1 (Fig. 145) der Kreise X und Y durch den Aehnlichkeitspunkt A der Kreise O und Q. Nach dem in der Antwort zu Frage 27 ausgesprochenen Satze ist:

$$Aa.Ab_1 = Ac.Ad_1.$$

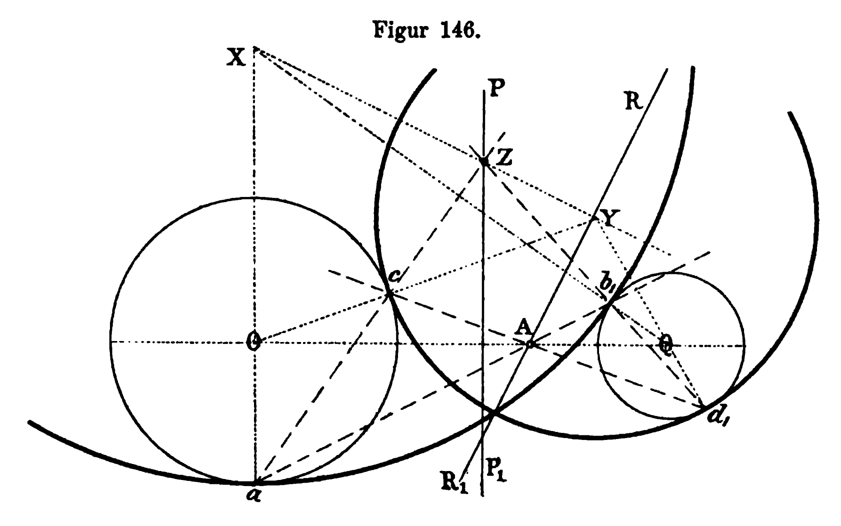
Also hat A gleiche Potenz in Bezug auf die Kreise X und Y, d. h. die Potenzlinie RR_1 von X und Y geht durch A.

Ebenso werden aber die Kreise X und Y von den Kreisen O und Q berührt, also gehen die Berührungssehnen ac und b_1d_1 durch einen Aehnlichkeitspunkt Z der Kreise X und Y, und es ist:

$$Za.Zc = Zb_1.Zd_1,$$

folglich hat Z gleiche Potenz in Bezug auf die Kreise O und Q, d. h. die Potenzlinie von O und Q geht durch Z.

Figur 146.



Der Beweis ist wörtlich derselbe für ungleichartige Berührung und innere Aehnlichkeitspunkte (Fig. 146).

d). Wenn zwei Kreise von einem dritten Kreise gleichartig (oder ungleichartig) berührt werden, so ist die Potenzlinie der zwei ersten Kreise eine Richtung des Berührungskreises, welche jeder Polaren des äusseren (oder inneren) Aehnlichkeitspunkts in den berührten Kreisen homolog ist.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

891. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben. Forts. v. Heft 890. — Seite 145—160. Mit 9 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 890. — Seite 145—160. Mit 9 Figuren.

Inhalt:

Allgemeine Lösung der Hauptaufgaben des Berührungsproblems durch Sätze der neueren Geometrie.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

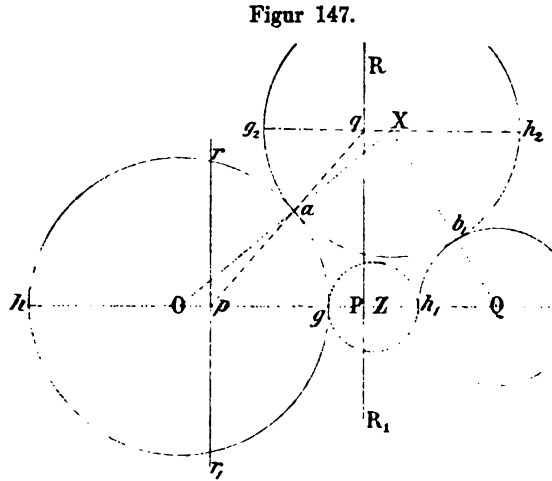
Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 147.



Beweis. Kreis X (Fig. 147) berührt die Kreise O und Q in a und b_1, es ist die Potenzlinie RR_1 der Kreise O und Q konstruiert und auf sie das Lot Xq gefällt. Ferner ist in Kreis O die Polare rr_1 des äusseren (oder inneren) Aehnlichkeitspunkts der beiden ersten Kreise gezogen, welche OQ in p trifft.

Beschreibe über dem Abstand zweier für den äusseren (oder inneren) Aehnlichkeitspunkt nicht homologen Scheitel g und h_1 als Durchmesser einen Kreis Z, so berührt derselbe die Kreise O und Q ebenso wie Kreis X. Daher ist nach Satz b) RR_1 Aehnlichkeitsstrahl der Kreise X und Z. Es werden daher die einander parallelen Durchmesser $g_2 h_2$ von Kreis X und $g h_1$ von Kreis Z durch RR_1 im gleichen Verhältnis geteilt, also

1) . . $g_2 q : h_2 q = g\mathrm{P} : h_1 \mathrm{P}$,

aber nach der Antwort auf Frage 28 wird der Durchmesser hg des Kreises O von der Polare rr_1 im gleichen Verhältnis geteilt wie gh_1 von der Potenzlinie RR_1, oder:

2) . . . . $gp : hp = g\mathrm{P} : h_1 \mathrm{P}$,

folglich:

$$gp : hp = g_2 q : h_2 q.$$

Die Punkte p und q teilen also die parallelen Durchmesser der Kreise O und X im selben Verhältnis, sind also nach Frage 26, Antwort d) homologe Punkte und die durch sie gehenden parallelen Geraden rr_1 und RR_1 homologe Geraden der Kreise O und X.

Der Beweis gilt wörtlich gleich für den äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt.

Frage 33. Welche Sätze gelten für die Berührungskreise an drei gegebene Kreise?

Antwort. a). Wenn drei Kreise von zwei andern Kreisen, jeder in derselben Weise, berührt werden, so ist der Potenzpunkt der drei ersten Kreise ein Aehnlichkeitspunkt der zwei Berührungskreise und zwar der äussere, wenn die letzteren alle drei Kreise gleichartig, ein

innerer, wenn sie dieselben ungleichartig berühren.

Der Beweis folgt aus Satz c) in Frage 32 sowie aus der Antwort zu Frage 31.

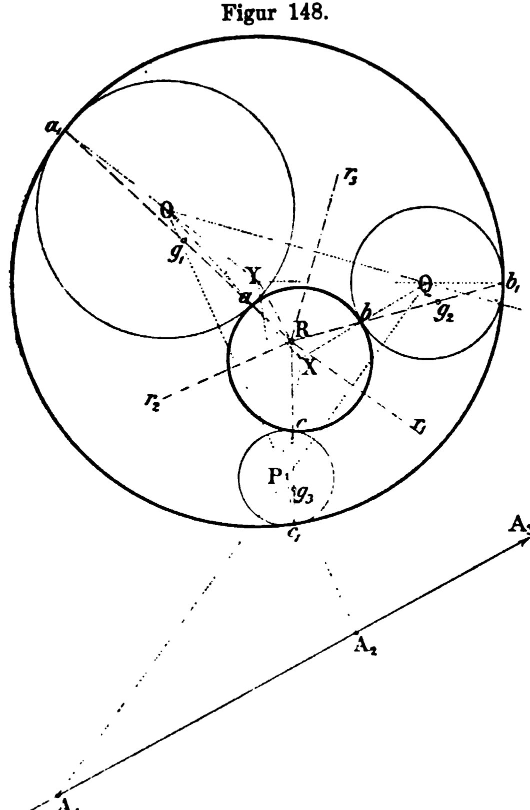
b). Werden drei Kreise von zwei andern Kreisen, von jedem in der gleichen Weise, berührt, so ist die Potenzlinie der beiden Berührungskreise eine Aehnlichkeitsaxe der drei ersten Kreise und zwar die äussere, wenn die drei Kreise von den Berührungskreisen gleichartig, eine innere, wenn sie ungleichartig berührt werden.

Der Beweis folgt aus Satz d) in der Antwort zu Frage 32 und aus der Antwort zu Frage 30.

Aufgabe 143 a. Sämtliche möglichen Berührungskreise zu drei gegebenen Kreisen zu zeichnen.

Erkl. 119. Die Aufgabe wurde in Nro 93 und 120 schon auf zwei andere Arten gelöst.

Figur 148.



Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

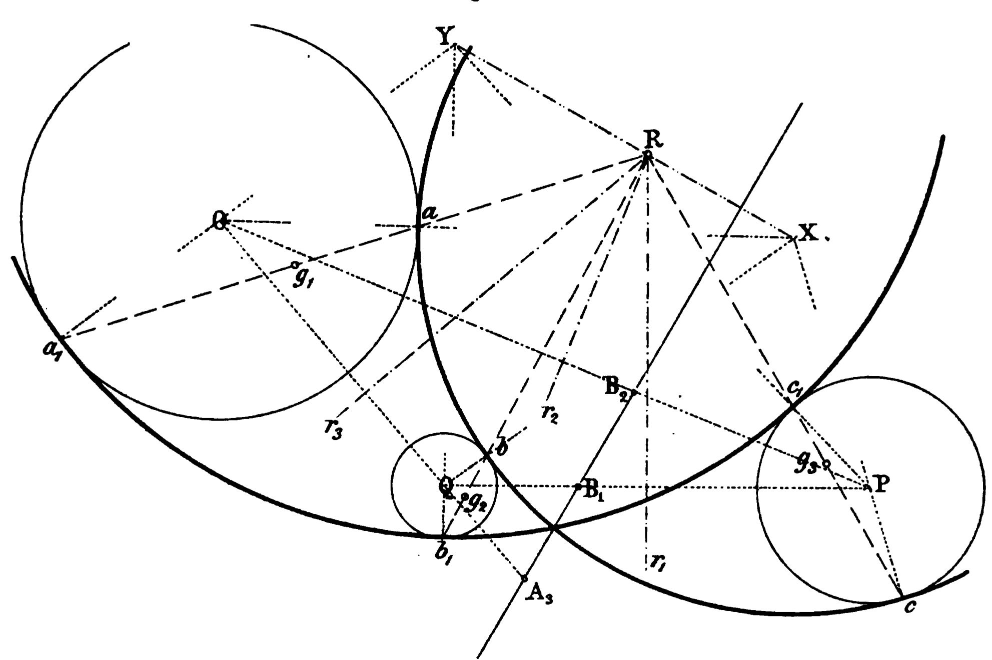
Gesucht: Kreise um X und Y.

Erste Lösung.

Analysis. Die gegebenen Kreise werden von den gesuchten Kreisen X und Y in Fig. 148 sämtlich gleichartig berührt. In Fig. 149 wird das Kreispaar O und Q gleichartig, die Paare O und P, sowie Q und P ungleichartig berührt. Nach Antwort b) zu Frage 33 ist die äussere Aehnlichkeitsaxe der drei Kreise O, Q, P Potenzlinie der Kreise X und Y in Fig. 148, und diejenige innere Aehnlichkeitsaxe, welche durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von O und Q geht, Potenzlinie der Kreise X und Y in Fig. 149. Die beiden Kreise X und Y werden von jedem der drei gegebenen Kreise berührt, also liegen nach Antwort b) zu Frage 32 die Pole g_1, g_2, g_3 der Potenzlinie von X und Y (d. h. der Aehnlichkeitsaxe $A_1 A_2 A_3$, bezw. $A_2 B_1 B_2$ der drei gegebenen Kreise) auf den Berührungssehnen aa_1, bb_1, cc_1. Ferner ist nach Antwort a) zu Frage 32 der Potenzpunkt R der drei gegebenen Kreise sowohl in Fig. 148 als in Fig. 149 innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise X und Y, weil diese die drei Kreise in entgegengesetzter Weise berühren. Es gehen daher nach Antwort a) zu Frage 32 die Berührungssehnen aa_1, bb_1, cc_1 durch R, weil jeder der drei Kreise O, P, Q die beiden Kreise X und X ungleich berührt.



Figur 149.



Erkl. 120. Werden drei Kreise O, Q, P von einem vierten Kreise X berührt, so liegt der Potenzpunkt R der drei ersten Kreise mit dem Pol einer ihrer Aehnlichkeitsaxen für einen dieser Kreise und mit dem Berührungspunkt dieses und des vierten Kreises in einer geraden Linie.

Man erhält also die Berührungspunkte a, a_1, b, b_1, c, c_1, wenn man R mit g_1, g_2, g_3 verbindet.

Konstruktion. Zeichne (Fig. 150) nach Antwort zu Frage 26 die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte A_1 A_2 A_3 und die drei inneren Aehnlichkeitspunkte B_1 B_2 B_3 der Kreispaare Q, P; O, P; O, Q; lege durch diese Punkte die vier Aehnlichkeitsaxen $A_1 A_2 A_3$; $A_1 B_2 B_3$; $A_2 B_1 B_3$; $A_3 B_1 B_2$.

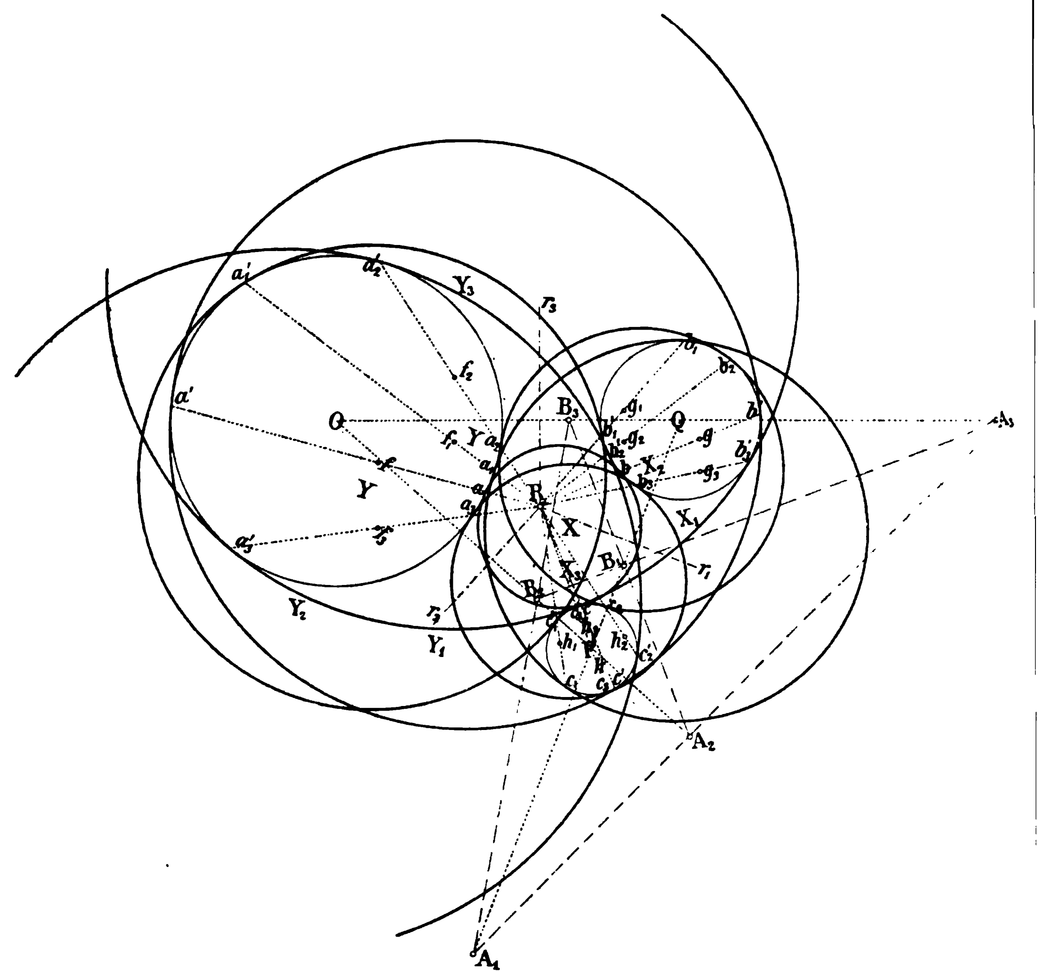
Konstruiere nach der Antwort zu Frage 20 zu jeder dieser vier Aehnlichkeitsaxen die Pole f, f_1, f_2, f_3 in Bezug auf Kreis O; g, g_1, g_2, g_3 in Bezug auf Kreis Q; h, h_1, h_2, h_3 in Bezug auf Kreis P.

Bestimme nach Anmerkung 28 und 29 oder Aufgabe 142 die Potenzlinie Rr_1, Rr_2, Rr_3 der drei Kreispaare Q, P; O, P; O, Q; diese Potenzlinien schneiden einander in einem Punkt, dem Potenzpunkt R.

Verbinde R mit jedem der vier Pole der Aehnlichkeitsaxen in jedem Kreis.

Rf	schneidet	Kreis	O.	in	a	und	a',
Rf_1	„	„	O	„	a_1	„	a'_1,
Rf_2	„	„	O	„	a_2	„	a'_2,
Rf_3	„	„	O	„	a_3	„	a'_3;

Figur 150.



Erkl. 121. Bei der Zeichnung von Fig. 150 sind im Interesse der Deutlichkeit alle Nebenkonstruktionen, wie die der Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien, Pole weggelassen, ebenso die Konstruktion der Mittelpunkte der gesuchten Kreise, nachdem die Berührungspunkte mit den gegebenen Kreisen gefunden sind.

Rg	schneidet	Kreis	Q	in	b	und	b',
Rg_1	„	„	Q	„	b_1	„	b'_1,
Rg_2	„	„	Q	„	b_2	„	b'_2,
Rg_3	„	„	Q	„	b_3	„	b'_3;
Rh	„	„	P	„	c	„	c',
Rh_1	„	„	P	„	c_1	„	c'_1,
Rh_2	„	„	P	„	c_2	„	c'_2,
Rh_3	„	„	P	„	c_3	„	c'_3.

Lege durch

a, b, c	den	Kreis	X
a', b', c'	„	„	Y
a_1, b_1, c_1	„	„	X_1
a'_1, b'_1, c'_1	„	„	Y_1
a_2, b_2, c_2	„	„	X_2
a'_2, b'_2, c'_2	„	„	Y_2

a_3, b_3, c_3 den Kreis X_3
a'_3, b'_3, c'_3 „ „ Y_3,

so sind diese acht Kreise die gesuchten.

Beweis folgt aus der Analysis.

Determination. Schon in Aufgabe 92 wurde darauf hingewiesen, dass es höchstens acht Berührungskreise gibt. Dies folgt auch aus der eben angegebenen Konstruktion; denn drei Kreise besitzen vier Aehnlichkeitsaxen. Jede dieser Aehnlichkeitsaxen besitzt für jeden der gegebenen Kreise einen Pol, folglich liegen innerhalb bezw. auf oder ausserhalb jedes Kreises vier Punkte, welche mit dem Potenzpunkt verbunden die Berührungspunkte des betreffenden Kreises mit den gesuchten Kreisen ergeben. Diese vier Verbindungsgeraden schneiden aber den Kreis höchstens in acht Punkten.

Liegen die drei Kreise ganz auseinander, so wird keiner von einer Aehnlichkeitsaxe geschnitten, folglich liegen dann die Pole derselben innerhalb der Kreise, der Potenzpunkt dagegen ausserhalb, die Verbindungsgeraden des Potenzpunkts mit den Polen müssen also die Kreise schneiden.

Erkl. 122. Liegen zwei Kreise aus einander, so liegen ihre beiden Aehnlichkeitspunkte ausserhalb der Kreise, da sie die Schnittpunkte gemeinsamer Tangenten sind.

Haben die drei Kreise eine gemeinsame Tangente, so ist diese eine der Aehnlichkeitsaxen, ihr Pol in Bezug auf jeden der drei Kreise ist daher der betreffende Berührungspunkt, die drei Halbmesser nach diesen Punkten sind aber parallel, nämlich senkrecht auf der gemeinsamen Tangente, folglich fällt einer der gesuchten Mittelpunkte ins Unendliche.

Erkl. 123. Ist die Polare Tangente an den Kreis, so fällt der Pol in den Berührungspunkt (siehe die Antwort zu Frage 21).

Berühren zwei der gegebenen Kreise einander, so fällt einer der Aehnlichkeitspunkte in den Berührungspunkt, und die Potenzlinie der zwei Kreise ist die gemeinsame Tangente in diesem Punkt, der Potenzpunkt der drei Kreise liegt auf dieser Tangente.

Erkl. 124. Bei Kreisen, welche einander von aussen (innen) berühren, fällt der innere (äussere) Aehnlichkeitspunkt in den Berührungspunkt (siehe die Antwort zu Frage 26).

Diejenigen beiden Aehnlichkeitsaxen, welche durch den erwähnten Berührungspunkt gehen, schneiden jeden der zwei Kreise. Ihre Pole in Bezug auf diese Kreise liegen also ausserhalb und zwar auf der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt (siehe Erkl. 125). Die Verbindungsgeraden des Potenzpunkts mit diesen Polpaaren fallen daher mit der gemeinsamen Tangente zusammen, oder für jeden der beiden einander berührenden Kreise fallen zwei Paare von Berührungspunkten in einen Punkt zusammen. Von den acht Berüh-

Erkl. 125. Schneidet die Polare den Kreis, so ist der Pol der Schnittpunkt der Tangenten in denjenigen Punkten, in welchen die Polare den Kreis schneidet (siehe die Antwort zu Frage 23).

rungskreisen fallen daher zwei Paare je in einen Kreis zusammen, oder die Zahl der Lösungen wird um zwei vermindert (vergl. Determination zu Aufgabe 93).

Dass acht Berührungskreise möglich sind, wenn alle drei Kreise einander schneiden, ergibt sich daraus, dass in diesem Fall der Potenzpunkt innerhalb jedes der drei Kreise liegt. Mögen nun die Pole der Aehnlichkeitsaxen innerhalb oder ausserhalb der Kreise liegen, so werden letztere von jeder Verbindungsgeraden des Potenzpunktes mit den Polen der Aehnlichkeitsaxen geschnitten.

Erkl. 126. Die Potenzlinie zweier Schnittkreise ist ihre Schnittsekante (siehe die Antwort zu Frage 24).

Im allgemeinen machen sich die bei der allgemein giltigen Konstruktion als unmöglich herausfallenden Lösungen durch den Umstand geltend, dass die Verbindungsgeraden des Potenzpunktes mit einem oder mehreren Polen der Aehnlichkeitsaxen für irgend einen Kreis diesen nicht mehr schneiden.

Aufgabe 143 b. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Gesucht: Kreis um X.

Zweite Lösung.

Analysis. Nach dem in Erkl. 120 ausgesprochenen Satze liegen in Fig. 148 und 149 die Punkte R, a, g_1 in gerader Linie, wobei R den Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise, g_1 den Pol einer der vier Aehnlichkeitsaxen in Bezug auf Kreis O und a den Berührungspunkt eines der gesuchten Kreise mit Kreis O bedeutet. Nach Satz c) in der Antwort zu Frage 22 (siehe Erkl. 127) gehen daher die Polaren dieser drei Punkte in Bezug auf Kreis O durch einen und denselben Punkt. Nun ist aber die Polare von g_1 die betreffende Aehnlichkeitsaxe, und die Polare von a ist die Tangente an Kreis O im Punkte a (siehe Erkl. 122), daher kann man a finden, wenn man die Polare des Potenzpunkts in Bezug auf Kreis O bis zum Schnitt mit der Aehnlichkeitsaxe verlängert und vom Schnittpunkt aus an Kreis O eine Tangente legt. Der betreffende Lehrsatz ist in Erkl. 128 ausgesprochen.

Erkl. 127. Liegen mehrere Punkte in gerader Linie, so schneiden ihre Polaren in Bezug auf einen Kreis einander im Pol dieser Geraden.

Erkl. 128. Die Polare des Potenzpunkts dreier Kreise in Bezug auf einen derselben schneidet jede ihrer vier Aehnlichkeitsaxen in einem solchen Punkte, dass die von demselben an den betreffenden Kreis gelegten Tangenten ihn in den Berührungspunkten des gemeinsamen Berührungskreises der drei Kreise berühren.

Man kann die Konstruktion für jeden der drei gegebenen Kreise wiederholen oder die Berührungspunkte auf den andern Kreisen dadurch suchen, dass man die Berührungs-

sehnen zieht, welche durch die Aehnlichkeitspunkte gehen [siehe Lehrsatz a) in der Antwort zu Frage 32], oder endlich kann man den Lehrsatz in der Antwort zu Frage 33 benützen. Aus demselben folgt, dass die Zentrale derjenigen zwei Kreise, welche die gegebenen Kreise auf die gleiche Art berühren, senkrecht zur zugehörigen Aehnlichkeitsaxe steht, denn die letztere ist Potenzlinie jener zwei Kreise.

Die erwähnte Zentrale geht aber nach Lehrsatz a) in der Antwort zu Frage 33 durch den Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise, weil dieser Aehnlichkeitspunkt der zwei zusammengehörigen Berührungskreise ist. Die Mittelpunkte der letzteren liegen daher auf der vom Potenzpunkt auf die zugehörige Aehnlichkeitsaxe gefällten Senkrechten.

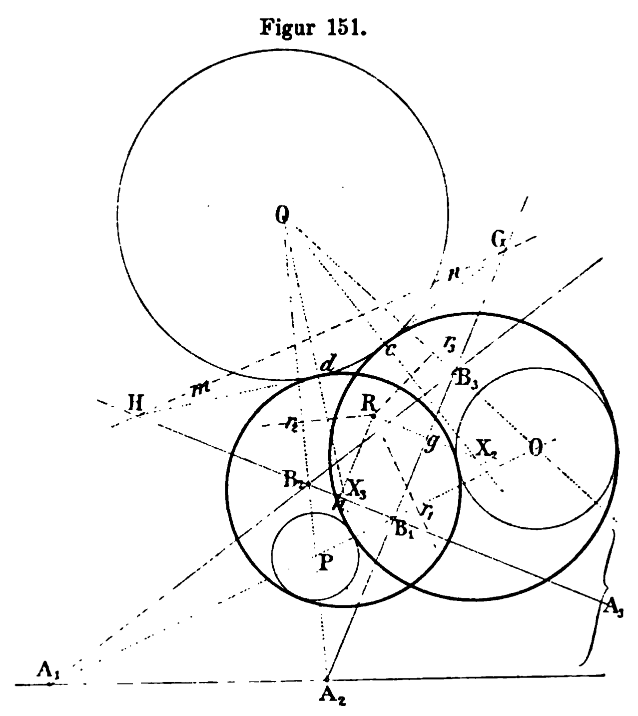
Erkl. 129. Fällt man vom Potenzpunkt dreier Kreise die Senkrechten auf die vier Aehnlichkeitsaxen, so liegen auf jeder Senkrechten zwei Mittelpunkte von gemeinsamen Berührungskreisen der gegebenen Kreise.

Erkl. 130. Da sämtliche acht Berührungskreise schon in Fig. 150 dargestellt sind, so ist Fig. 151 nur für ein Paar von Berührungskreisen durchgeführt, während der Text sich auf sämtliche Berührungskreise bezieht.

Konstruktion. Bestimme zu den drei gegebenen Kreisen um O, Q, P den Potenzpunkt R und die vier Aehnlichkeitsaxen $A_1 A_2 A_3$; $A_1 B_2 B_3$; $A_2 B_1 B_3$; $A_3 B_1 B_2$.

Konstruiere die Polare mn des Potenz-

Figur 151.



punkts R für den Kreis O; mn schneidet die vier Aehnlichkeitsaxen in den Punkten E, F, G, H. Ziehe von diesen Punkten an Kreis O die Tangenten Ea und Ea', Fb und Fb', Gc und Gc', Hd und Hd'.

Ziehe durch R die Senkrechten

Re zu $A_1 A_2 A_3$; Rf zu $A_1 B_2 B_3$;
Rg zu $A_2 B_1 B_3$; Rh zu $A_3 B_1 B_2$.

Re schneidet Oa in X, Oa' in Y,
Rf „ Ob in X_1, Ob' in Y_1,
Rg „ Oc in X_2, Oc' in Y_2,
Rh „ Od in X_3, Od' in Y_3.

Beschreibe um X mit Xa, Y mit Ya', X_1 mit X_1b, Y_1 mit Y_1b' u. s. w. Kreise, so sind diese die gesuchten.

Beweis folgt aus der Analysis.

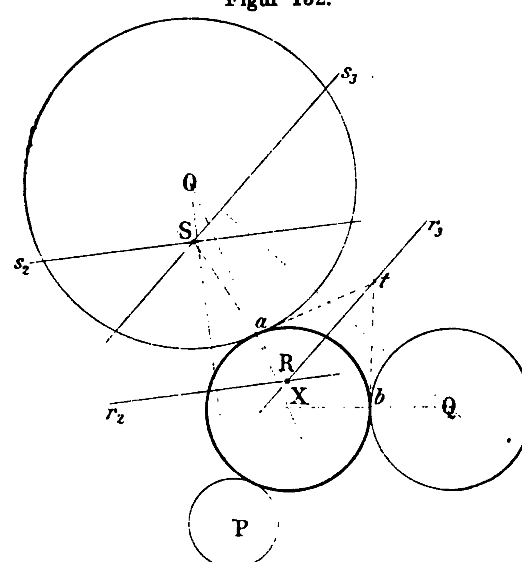
Determination. Die als unmöglich ausfallenden Berührungskreise geben sich dadurch kund, dass die Polare des Potenzpunkts und eine Aehnlichkeitsaxe einander innerhalb des Kreises O schneiden.

Aufgabe 143 c. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Gesucht: Kreis um X.

Figur 152.



Dritte Lösung.

Analysis. Kreis X (Fig. 152 und 153) berühre die drei gegebenen Kreise und zwar in Fig. 152 alle gleichartig, in Fig. 153 den Kreis O verschieden von Q und P. Der Berührungspunkt mit Kreis O sei a.

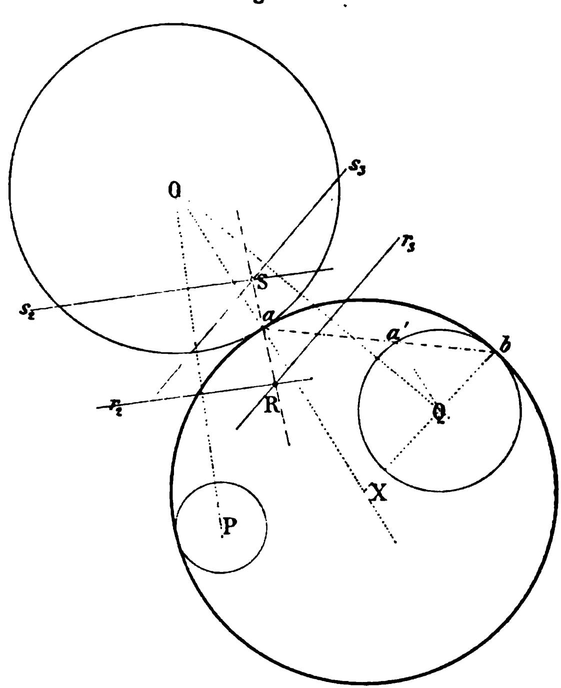
Nach Satz d) in der Antwort zu Frage 32 sind die Potenzlinie Rr_3 zwischen O und Q und die Polare Ss_3 des (äusseren in Fig. 152, inneren in Fig. 153) Aehnlichkeitspunkts von O und Q im Kreis O homologe Richtungen der Kreise X und O.

Ebenso sind die Potenzlinie Rr_2 zwischen Kreis O und Kreis P, sowie die Polare Ss_2 des (äusseren in Fig. 152, inneren in Fig. 153) Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und P, bezogen auf Kreis O, homologe Geraden der Kreise X und O.

Daher sind die Schnittpunkte: R von Rr_3 und Rr_2 und S von Ss_3 und Ss_2 homologe Punkte der Kreise X und O (siehe die Antwort zu Frage 26).

Da aber die Verbindungsgeraden homologer Punkte durch den Aehnlichkeitspunkt gehen (Antwort zu Frage 26), und bei Kreisen, welche einander berühren, der Berüh-

Figur 153.



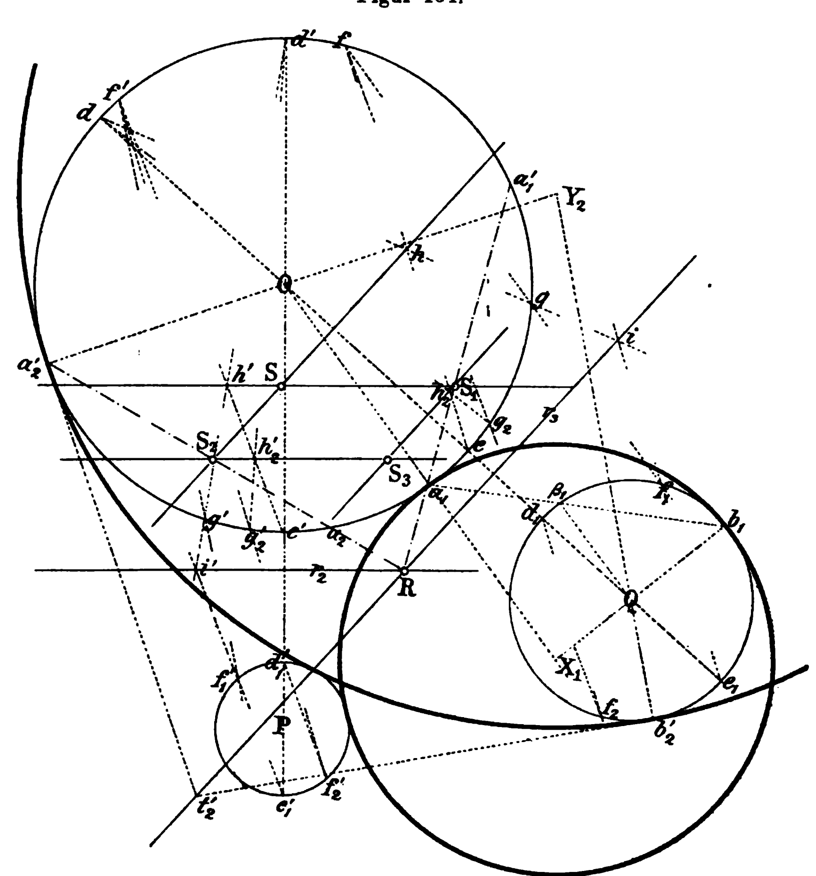
rungspunkt Aehnlichkeitspunkt ist (innerer bei äusserer Berührung, äusserer bei innerer Berührung, siehe Erkl. 123), so geht die Verbindungsgerade RS durch den Berührungspunkt a. Den Berührungspunkt b auf Kreis Q findet man, wenn man die in Aufgabe 157 zur gleichzeitigen Zeichnung von Potenzlinie und Polare des Aehnlichkeitspunkts angegebene Konstruktion von rückwärts anwendet (siehe Fig. 153), oder indem man beachtet, dass die Tangenten in a und b einander auf der Potenzlinie von Kreis O und Kreis Q schneiden (siehe Fig. 152).

Konstruktion. Ziehe (Fig. 154) OQ, welche Kreis O in d und e, Kreis Q in den gleichnamigen Punkten d_1 und e_1 trifft. Ziehe durch e in Kreis O die beliebige Sehne ef und in Kreis Q die dazu parallelen Sehnen $e_1 f_1$ und $d_1 f_2$. Ziehe ff_1 und ff_2, welche Kreis O in g und g_2 treffen, ziehe dg, welche die ef in h und die $e_1 f_1$ in c schneidet, und ziehe dg_2, welche die ef in h_2 schneidet.

Ziehe durch i, h, h_2 die Senkrechten zu OQ, so ist die durch i gehende Senkrechte Potenzlinie der Kreise O und Q, die durch h gehende Senkrechte ist Polare des äusseren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und Q,

bezogen auf Kreis O, die durch h_2 gehende Senkrechte ist Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und Q, bezogen auf Kreis O.

Figur 154.



Wiederhole die eben angegebene Konstruktion für die Kreise O und P: OP schneidet Kreis O in d' und e', Kreis P in den gleichnamigen Punkten d'_1 und e'_1. Die Sehnen $e'f'$, $e'_1f'_1$, $d'_1f'_2$ sind zu einander parallel, aber von beliebiger Richtung. $f'f'_1$ gibt auf Kreis O den Punkt g', $f'f'_2$ gibt auf Kreis O den Punkt g'_2. $e'f'$ und $d'g'$ schneiden einander in h'. $e'f'$ und $d'g'_2$ schneiden einander in h_2. $d'g'$ schneidet die $e'_1f'_1$ in i'. Die Senkrechte durch i' zu OP ist Potenzlinie der Kreise O und P. Die Senkrechte durch h' zu OP ist Polare des äusseren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und P, bezogen auf Kreis O. Die Senkrechte durch h'_2 zu OP ist Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O

und P, bezogen auf Kreis O (siehe Aufgabe 142).

Die Potenzlinien ir_3 und $i'r_2$ schneiden einander im Potenzpunkt R der drei Kreise.

Die Polaren der äusseren Aehnlichkeitspunkte, d. h. die Senkrechten zu OQ und OP durch h und h' treffen einander in S. Die Polaren der inneren Aehnlichkeitspunkte, d. h. die Senkrechten zu OQ und OP durch h_2 und h'_2, treffen einander in S_3. Die Polare des äusseren Aehnlichkeitspunkts von O und Q trifft die Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts von O und P in S_2, die Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts von O und Q trifft die Polare des äusseren Aehnlichkeitspunkts von O und P in S_1.

Verbinde den Potenzpunkt R mit den Punkten S, S_1, S_2, S_3. Die Verbindungsgeraden schneiden den Kreis O in je zwei Punkten a und a', a_1 und a'_1, a_2 und a'_2, a_3 und a'_3. Diese acht Punkte sind die Berührungspunkte des Kreises O mit den acht gesuchten Kreisen.

Um die zugehörigen Mittelpunkte, z. B. den Mittelpunkt des Kreises X_1, welcher Kreis O in a_1 berührt, zu finden, ziehe Halbmesser Oa_1 und dazu parallel in Kreis Q den Halbmesser $O\beta_1$; $a_1\beta_1$ schneidet Kreis Q in b_1; der letztere Punkt ist der Berührungspunkt des Kreises Q mit dem Kreis X_1 [siehe Antwort a) zu Frage 33]. Daher schneiden Oa_1 und Ob_1 einander in X_1.

Um die Mittelpunkte zu finden, kann man auch (siehe die Analysis) so verfahren: Lege z. B. in a'_2 an Kreis O die Tangente, welche die Potenzlinie zwischen Kreis O und Kreis Q in t'_2 trifft. Lege von t'_2 an Kreis Q die Tangente $t'_2b'_2$, ziehe Oa'_2 und Qb'_2, welche einander in Y_2 treffen, so ist Y_2 der Mittelpunkt eines Berührungskreises.

Erkl. 131. a). Werden zwei Kreise O und Q von einem Kreise X gleichartig (ungleichartig) berührt, so sind die äussere (innere) Aehnlichkeitspolare für den Kreis O und die Potenzlinie für den Kreis X homologe Geraden.

b). Homologe Geradenpaare schneiden einander in homologen Punkten.

c). Die Verbindungsgerade homologer Punkte geht durch den Aehnlichkeitspunkt.

d). Wenn zwei Kreise einander von aussen (von innen) berühren, so ist der Berührungspunkt innerer (äusserer) Aehnlichkeitspunkt.

Beweis folgt aus der Analysis.

Anmerkung 43. Die erste und die dritte Lösung der Aufgabe 143 sind im Wesentlichen dieselben. Denn da z. B.

Sh die Polare des äusseren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und Q,

Sh_2 „ „ „ „ „ „ „ O und P

ist, so ist der Schnittpunkt S von Sh und Sh_2 nach Satz c) in der Antwort zu Frage 22 der Pol der Geraden, welche jene beiden äusseren Aehnlichkeitspunkte verbindet, d. h. der äusseren Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise. Die vier Punkte S, S_1, S_2, S_3 von Fig. 154 sind also nichts anderes als die Punkte f, f_2, f_3, f_1 in Fig. 150.

Analysis und Konstruktion in Aufgabe 143 a) hat den Vorzug grösserer Eleganz, dagegen hat sie den Nachteil, dass man sämtliche Aehnlichkeitsaxen zu zeichnen und ihre Pole in Bezug auf jeden der drei Kreise zu konstruieren hat. Dies ist bei beschränktem Zeichenraume häufig mühsam, während bei Aufgabe 143 c)

die Aehnlichkeitspunkte selbst nicht bekannt sein müssen. In Aufgabe 143 c) werden überdies die Potenzlinien und die Polaren der Aehnlichkeitspunkte gleichzeitig konstruiert. Die letztere Konstruktion empfiehlt sich besonders dann, wenn nur ein einzelner Berührungskreis oder ein Paar von solchen gezeichnet werden soll.

Die zweite Konstruktion erfordert in der Regel einen grösseren Raum, wenn die Zeichnung sämtlicher Berührungskreise verlangt wird, kann aber für einzelne derselben sehr bequem sein.

Wenn die Mittelpunkte der drei Kreise nahezu in eine Gerade fallen, so fällt der Potenzpunkt in grosse Entfernung, dagegen lassen sich seine Polaren zeichnen, ohne dass man ihn kennt; man konstruiert nämlich für jeden Kreis die Pole zweier Potenzlinien und verbindet dieselben [siehe Satz c) in der Antwort zu Frage 22]. In diesem Falle ist daher die zweite Konstruktion vorzuziehen.

Aufgabe 144. Die Berührungskreise zu drei gegebenen Kreisen zu zeichnen, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen.

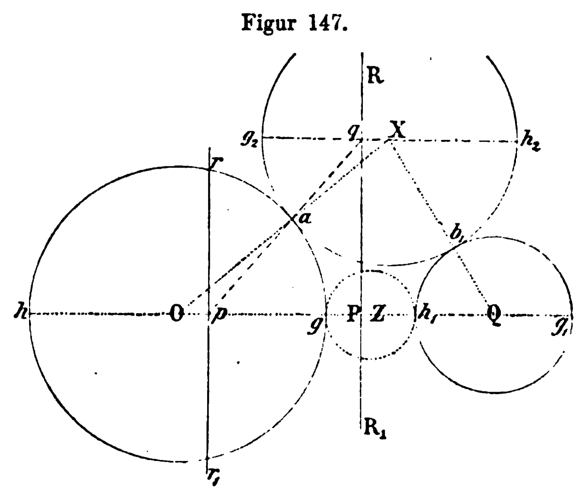
Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Voraussetzung: O, Q, P liegen in gerader Linie.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Unter der in der Aufgabe genannten Voraussetzung lassen die Aufgabe 143 angegebenen Konstruktionen im Stich, da die Potenzlinien parallel werden, also der Potenzpunkt in unendliche Entfernung fällt. Ebenso werden die Polaren der Aehnlichkeitspunkte parallel, schneiden einander also in unendlicher Entfernung; die Aehnlichkeitsaxen fallen mit der gemeinsamen Zentrale zusammen.

Figur 147.



In diesem Falle lässt sich der Halbmesser jedes Berührungskreises durch eine einfache Proportion bestimmen.

Es sei (Fig. 147) X der Mittelpunkt eines Berührungskreises, so sind nach Lehrsatz d) in der Antwort zur Frage 32 die Potenzlinie zweier Kreise O und Q, sowie die Polare ihres Aehnlichkeitspunkts (des äusseren bei gleichartiger, des inneren bei ungleichartiger Berührung), bezogen auf Kreis O, homologe Geraden der Kreise X und O.

Fällt man von X auf die Potenzlinie das Lot Xq, ist Op der Abstand des Mittelpunkts O von der Polare des Aehnlichkeitspunkts, ist ferner x der Halbmesser des Berührungskreises und R derjenige von O, so sind die Strecken Op und Xq homologe Strecken der Kreise O und X, sie verhalten sich daher wie die Halbmesser:

1). . . . . . $Op : Xq = R : x.$

Sind Op_1 und Xq_1 die Abstände der Punkte

O und X von der Polare des Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und P bezw. von der Potenzlinie der Kreise O und P, so ist ebenso:

2). . . . . . $Op_1 : Xq_1 = R : x$.

Aus 1) und 2) folgt:

$$Op : Xq = Op_1 : Xq_1,$$

Daraus folgt:

$$Op_1 - Op : Xq_1 - Xq = Op : Xq,$$

oder wegen 1)

3). . . $Op_1 - Op : Xq_1 - Xq = R : x$.

$Op_1 - Op$ ist der Abstand der beiden Polaren, $Xq_1 - Xq$ der Abstand der beiden Potenzlinien. Schneiden letztere die Zentrale in P und P_1, so ist:

4). . . . . . $pp_1 : PP_1 = R : x$.

Daraus lässt sich der Halbmesser x eines Berührungskreises finden, und konzentrische Kreise um O und Q mit $R + x$ bezw. $R_1 + x$ geben den Mittelpunkt.

Je nachdem man die Polaren des inneren oder des äusseren Aehnlichkeitspunkts für jedes der Kreispaare O und Q, O und P wählt, erhält man einen andern Wert für x, zusammen vier Werte. Die konzentrischen Kreise um O und Q schneiden einander je in zwei gegen die Zentrale symmetrischen Punkten, also ist die höchste Zahl der Lösungen auch in diesem Falle acht.

Erkl. 132. Der in nebenstehender Analysis bewiesene Satz lautet:

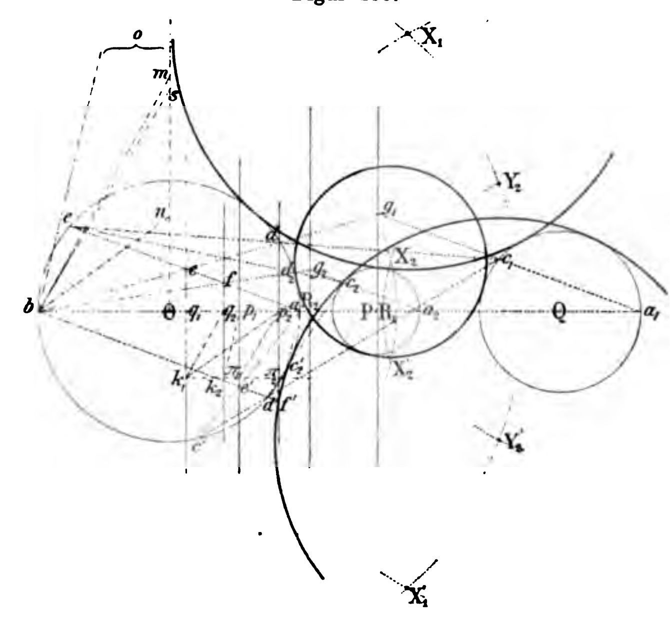
Werden drei Kreise, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, von einem vierten Kreise berührt und konstruiert man die Potenzlinien des ersten und zweiten, sowie des ersten und dritten Kreises, konstruiert man ferner im ersten Kreis die Aehnlichkeitspolaren mit dem zweiten und dritten Kreis, so verhält sich der Halbmesser des ersten zum Halbmesser des vierten Kreises wie der Abstand der Aehnlichkeitspolaren zum Abstand der Potenzlinien. Hat der vierte Kreis mit zweien der gegebenen Kreise gleichartige Berührung, so ist für dieselben die äussere, hat er ungleiche Berührung, so ist die innere Aehnlichkeitspolare zu nehmen.

Konstruktion. Ziehe die gemeinsame Zentrale der drei Kreise (siehe Fig. 155). Dieselbe schneidet Kreis O in a und b, die gleichnamigen Punkte der Kreise Q und P seien a_1, b_1; a_2, b_2; ziehe in den drei Kreisen in beliebiger Richtung, aber zu einander parallel die Sehnen ac, bd', a_1c_1, a_2c_2.

Ziehe cc_1 und cc_2, welche Kreis O in d und d_2 schneiden; ziehe $d'c_1$ und $d'c_2$, welche Kreis O in c' und c_2' schneiden. Ziehe bd, bd_2, ac', ac_2'.

bd	schneidet	ac	in e,
bd_2	„	ac	in f,
ac'	„	bd'	in e,
ac_2'	„	bd'	in f',
bd	„	a_1c_1	in g_1,
bd_2	„	a_2c_2	in g_2.

Figur 155.



Fälle auf O Q

durch g_1 die Senkrechte $g_1 R_1$,
" g_2 " " $g_2 R_2$,
" e " " $e q_1$,
" f " " $f q_2$,
" e' " " $e' p_1$,
" f' " " $f' p_2$.

$g_1 R_1$ und $g_2 R_2$ sind die Potenzlinien zwischen Kreis O einerseits und Kreis Q bezw. Kreis P andererseits. $e q_1$ und $e' p_1$ sind die Polaren des äusseren Aehnlichkeitspunkts zwischen Kreis O und Kreis Q bezw. Kreis P bezogen auf Kreis O, $f q_2$ und $f' p_2$ sind die Polaren des inneren Aehnlichkeitspunkts von jedem der genannten beiden Kreispaare bezogen auf Kreis O (siehe Aufgabe 142).

Ziehe im Abstande $R_1 R_2$ zu O Q eine Parallele, welche $e q_1$ in k_1, $f q_2$ in k_2, $e' p_1$ in π_1, $f' p_2$ in π_2 trifft.

Ziehe durch O zu O Q die Senkrechte, ziehe $k_1 q_2$, $k_1 p_2$, $k_2 p_1$, $\pi_1 p_2$ und die Parallelen dazu durch b, welche die in O errichtete Senkrechte bezw. in den Punkten m, n, o, s treffen.

Die Strecken Om, On, Oo, Os sind die Halbmesser von vier Paaren von je zwei gegen O Q symmetrischen Kreisen, von welchen das erste alle drei gegebenen Kreise gleichartig berührt, das zweite die Kreise O und Q gleichartig, aber verschieden von

Kreis P, das dritte O und P gleichartig, aber verschieden von Kreis Q, das vierte endlich die Kreise Q und P gleichartig, aber verschieden von Kreis O berührt. Die Mittelpunkte der Berührungskreise werden nach Aufgabe 6 in folgender Weise gefunden: Verlängere die Halbmesser der Kreise O und Q um Om, beschreibe mit den verlängerten Halbmessern konzentrische Kreise um O und Q, diese schneiden einander in X_1 und X_1'. Verlängere die Halbmesser der Kreise O und Q je um On und beschreibe um O und Q mit den verlängerten Halbmessern konzentrische Kreise, welche einander in X_2 und X_2' schneiden.

Beschreibe um O mit der Differenz von Oo und Ob, um Q mit der Summe von Oo und Qa_1 Kreise, die einander in Y_1 und Y_1' schneiden; beschreibe endlich um O mit der Summe von Os und Ob, um Q mit der Differenz von Os und Qa_1 Kreise, die einander in Y_2 und Y_2' schneiden.

Die Punkte X_1, X_1'; X_2, X_2'; Y_1, Y_1'; Y_2, Y_2' sind die gesuchten Mittelpunkte.

Erkl. 133. Die Kreise Y_1 und Y'_1 sind wegen ihrer Grösse nicht mehr in Fig. 155 enthalten.

Beweis. Die auf OQ senkrechten Geraden g_1R_1, g_2R_2, eq_1, fq_2, $e'p_1$, $f'p_2$ sind die Potenzlinien bezw. Polaren der äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkte zwischen Kreis O und Q bezw. O und P, da die zu ihrer Auffindung verwendete Konstruktion genau der Aufgabe 142 entspricht.

Nun ist z. B. $k_1q_2 = R_1R_2$, weil die Parallele zu OQ, auf welcher k_1, k_2, π_1, π_2 liegen, im Abstande R_1R_2 gezogen wurde. Ferner ist

$$bm \parallel k_1q_2,$$
$$Om \parallel q_1k_1,$$
$$Ob \parallel q_2q_1;$$

Erkl. 134. Lote zwischen Parallelen sind einander gleich.

daher die Dreiecke Obm und $q_1q_2k_1$ einander ähnlich, folglich:

$$Om : Ob = q_1k_1 : q_1q_2;$$

(S. Erkl. 56.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten einander paarweise parallel sind.

aber:

$$Om = \text{rad von } X_1,$$
$$Ob = \text{rad von } O,$$
$$q_1k_1 = R_1R_2,$$

also:

$$\text{rad von } X_1 : \text{rad von } O = R_1R_2 : q_1q_2$$

also ist rad von X_1 der Halbmesser eines Kreises, welcher die drei Kreise O, Q, P gleichartig berührt (siehe die Analysis und Erkl. 132).

Nach Konstruktion ist aber:

$$X_1O = \text{rad von } O + \text{rad von } X_1,$$
$$X_1Q = \text{rad von } Q + \text{rad von } X_1,$$

folglich berührt der Kreis um X_1 mit dem konstruierten Halbmesser die Kreise O und Q (siehe Erkl. 4). Nach Erkl. 132 berührt er somit auch Kreis P.

Analog ist der Beweis für die anderen Kreise.

Determination. I. Wenn die drei gegebenen Kreise einander nicht schneiden, so berührt das erste Kreispaar die gegebenen Kreise von aussen, wenn der mittlere Kreis zwischen den äusseren gemeinschaftlichen Tangenten der äusseren Kreise liegt, berührt die gegebenen Kreise umschliessend, wenn das äussere Tangentenpaar der äusseren Kreise vom mittleren Kreis geschnitten wird, und artet in das Tangentenpaar aus, wenn dieses allen drei Kreisen gemeinschaftlich ist.

Das zweite Paar berührt den mittleren Kreis umschliessend, die beiden anderen von aussen.

Das dritte Paar berührt O und P umschliessend und Q von aussen, oder berührt O und P von aussen und Q umschliessend, je nachdem Kreis Q die äusseren gemeinsamen Tangenten der Kreise O und P schneidet oder nicht; es artet in diese Tangenten aus, wenn dieselben allen drei Kreisen gemeinsam sind.

Das vierte Kreispaar berührt O von aussen, P und Q umschliessend, oder O umschliessend, P und Q von aussen, je nachdem Kreis O die äusseren gemeinsamen Tangenten von Q und P schneidet oder nicht, und fällt mit den Tangenten zusammen, wenn dieselben allen drei Kreisen gemeinsam sind.

II. Schneiden zwei der gegebenen Kreise, z. B. O und P, einander, und liegt der dritte getrennt davon, so gelten für das erste Kreispaar die gleichen Bedingungen wie bei I; das zweite Kreispaar fällt weg; für das dritte Kreispaar gelten die gleichen Bedingungen wie bei I, das vierte Kreispaar fällt weg.

III. Schneidet der erste Kreis den zweiten, aber nicht den dritten, so gelten für das erste Paar die Bedingungen von I, das zweite Paar berührt Kreis P von innen, O und Q von aussen, das dritte und das vierte Paar fallen weg.

IV. Schneiden alle drei Kreise einander, aber nicht in denselben zwei Punkten, so berührt das erste Paar alle drei Kreise von innen, wenn Kreis P innerhalb des von den beiden andern Kreisen umschlossenen Raumes liegt, während im andern Falle die Bedingungen von I be-

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

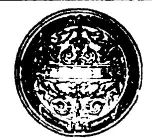
898. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 891. — Seite 161—176.
Mit 10 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik,** mathemat. Geographie, Astronomie; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, **Militärs** etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 891. — Seite 161—176. Mit 10 Figuren.

Inhalt:

Allgemeine Lösung der Hauptaufgaben des Berührungsproblems durch Sätze der neueren Geometrie.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disziplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

stehen bleiben; das zweite Paar berührt P von innen, O und Q von aussen, oder P von aussen, O und Q von innen, je nachdem Teile des Kreises P ausserhalb des von O und Q umschlossenen Raumes liegen oder nicht. Das gleiche Unterscheidungsmerkmal gilt für das dritte und vierte Paar; im ersteren Falle, d. h. wenn der mittlere Kreis ausserhalb der Kreise O und Q liegt, berührt das dritte Paar die beiden ersten Kreise von innen, Q von aussen, das vierte Paar P und Q von innen, O von aussen; im zweiten Falle berührt das dritte Paar O und P von aussen, Q von innen, das vierte Paar O von innen, P und Q von aussen.

V. Schneiden O und Q einander und liegt P ganz innerhalb der beiden andern Kreise, so berührt das erste Paar O und Q von innen, P umschliessend, das zweite Paar berührt O und Q von innen, P von aussen, das dritte und das vierte Paar fallen weg.

VI. Schneiden zwei Kreise, z. B. O und Q, einander und werden vom dritten umschlossen, so berührt das erste Paar O und Q umschliessend, P von innen, das zweite Paar berührt O und Q von aussen, P von innen, die beiden andern Paare fallen weg.

VII. Schneiden zwei Kreise, z. B. O und Q, einander nicht, werden aber vom dritten umschlossen, so berührt das erste Paar O und Q umschliessend, P von innen, das zweite O und Q von aussen, P von innen, das dritte O umschliessend, P von innen, Q von aussen, das vierte Paar O von aussen, Q umschliessend, P von innen.

VIII. Berühren zwei der gegebenen Kreise einander von aussen (innen), so fallen die beiden Kreise von jedem der beiden Paare, welche jene zwei gegebenen Kreise gleichartig (ungleichartig) berühren, in einen einzigen zusammen.

IX. Berührt der mittlere Kreis die beiden äusseren von aussen, so bleibt nur das erste Kreispaar unter den in I) angeführten Bedingungen übrig, ausserdem je ein Kreis des dritten und des vierten Paars.

XI. Berührt der mittlere Kreis die beiden andern umschliessend, so bleibt das zweite Paar übrig und ausserdem je ein Kreis des dritten und vierten Paars.

XII. Berührt der mittlere Kreis die beiden andern umschliessend und diese einander von aussen, so bleibt nur das zweite Paar übrig.

Anmerkung 44. Die Determination von Aufgabe 144 ist nur ein kleiner spezieller Teil von der Determination der allgemeinen Aufgabe 143. Diese ist somit sehr ausgedehnt und konnte deshalb nicht eingehender behandelt werden.

Frage 34. Welche Fälle der Kreisberührungsaufgaben können als Spezialfälle der Aufgabe 143 nach der dort gezeigten Methode gelöst werden, und inwiefern?

(S. Erkl. 120.) Werden drei Kreise O, Q, P von einem vierten Kreise X berührt, so liegt der Potenzpunkt R der drei ersten Kreise mit dem Pol einer ihrer Aehnlichkeitsaxen für einen dieser Kreise und mit dem Berührungspunkt desselben und des vierten Kreises in einer geraden Linie.

Antwort. Wenn unter den gegebenen Punkten, Geraden, Kreisen sich wenigstens ein Kreis findet, so können die Aehnlichkeitspunkte und die Potenzlinien zwischen diesem Kreis und den andern Bestimmungsstücken, daher auch die Aehnlichkeitsaxen und ihre Pole in Bezug auf diesen Kreis nach der Antwort zu Frage 29 gefunden werden. Daher lassen sich auch nach dem in Erkl. 120 ausgesprochenen Satze auf diesem Kreis die Berührungspunkte finden. Bei den Aufgaben: Zu zwei Punkten und einer Geraden, oder zu zwei Geraden und einem Punkt die Berührungskreise zu zeichnen, ist jedoch die Konstruktion von Aufgabe 143 nicht mehr anwendbar, weil jener Satz nur die Berührungspunkte liefert, und diese bei einem in einen Punkt ausartenden Kreis mit dem Punkt zusammenfallen, nicht aber die Richtung der Halbmesser nach den Berührungspunkten. Für die genannten beiden Fälle ist daher die allgemeine Konstruktion etwas zu verändern.

Aufgabe 145. Zu zwei gegebenen Kreisen und einem gegebenen Punkt die Berührungskreise zu zeichnen.

Gegeben: P, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Aehnlichkeitspunkte zwischen Punkt P und jedem der Kreise O und Q fallen mit Punkt P zusammen; daher existieren in dem System O, Q, P nur die zwei Aehnlichkeitsaxen PA nach dem äusseren und PB nach dem inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und Q.

Ihre Pole in Bezug auf Kreis O erhält man entweder durch Zirkelkonstruktion mit Hilfe von Tangentenpaaren oder nach Frage 23 durch das Lineal allein gleichzeitig mit den Potenzlinien.

Hat man für Kreis O konstruiert:

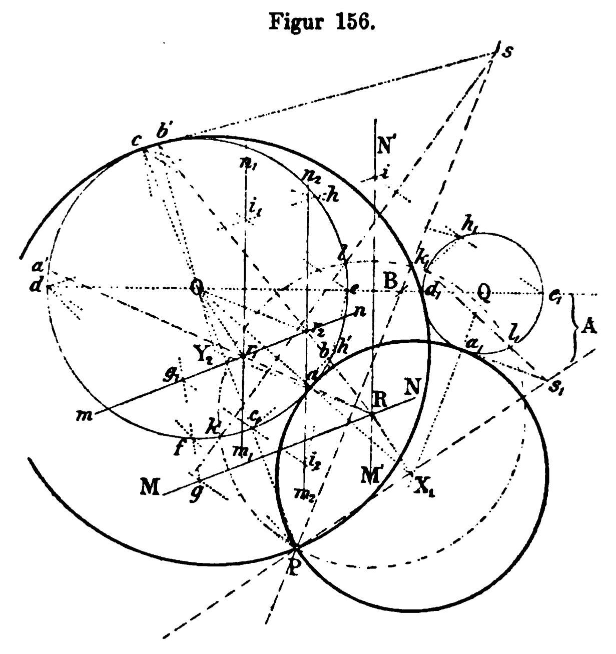
1). die Polare *mn* und die Potenzlinie MN des Punktes P,

2). die äussere Aehnlichkeitspolare $m_1 n_1$, die innere Aehnlichkeitspolare $m_2 n_2$ und die Potenzlinie M′N′ zwischen Kreis O und Kreis Q,

so schneiden die Potenzlinien einander im Potenzpunkt R, die Polaren mn und $m_1 n_1$ im Pol r_1 der äusseren Aehnlichkeitsaxe und die Polaren mn und $m_2 n_2$ im Pol r_2 der inneren Aehnlichkeitsaxe.

Die Geraden Rr_1 und Rr_2 liefern dann auf Kreis O die Berührungspunkte a, a', b, b'.

Figur 156.



Konstruktion. Ziehe PO, welche Kreis O in c und c_1 schneidet, ziehe OQ, welche die Kreise O und Q bezw. in den gleichnamigen Punktepaaren d, e; d_1, e_1 schneidet, ziehe ce, $c_1 d$ und Parallelen dazu durch P und e_1, letztere Parallele schneidet Kreis Q in h_1. Ziehe Pd, ch_1, $c_1 h_1$, welche Kreis O bezw. in den Punkten f, h, h' schneiden.

Ziehe cf, welche $c_1 d$ in g_1 und die Parallele zu $c_1 d$ durch P in g schneidet; ziehe dh, welche ec in i_1, $e_1 h_1$ in i schneidet; ziehe eh', welche dc_1 in i_2 trifft. Fälle von g und g_1 auf OP die Senkrechten MN bezw. mn, fälle von i, i_1, i_2 auf OQ die Senkrechten M′N′ bezw. $m_1 n_1$ bezw. $m_2 n_2$. mn wird von $m_1 n_1$ in r_1, von $m_2 n_2$ in r_2, MN wird von M′N′ in R getroffen.

Ziehe Rr_1 und Rr_2, welche den Kreis O bezw. in den Punktepaaren a, a'; b, b' schneiden, so sind diese Punkte die Berührungs-

Erkl. 135. Da die Schnittpunkte der Aehnlichkeitspolaren in Kreis O und der Potenzpunkt im Berührungskreise homologe Punkte dieser beiden Kreise sind, so geht nicht nur ihre Verbindungsgerade durch den Aehnlichkeitspunkt, d. h. den Berührungspunkt, sondern die Verbindungsstrecken dieser Punkte mit den zugehörigen Mittelpunkten, z. B. Or_1 und RX_1 oder Or_2 und RX_2 sind auch einander parallel.

(S. Erkl. 128.) Die Polare des Potenzpunkts dreier Kreise in Bezug auf einen derselben schneidet jede ihrer vier Aehnlichkeitsaxen in einem solchen Punkte, dass die von demselben an den betreffenden Kreis gelegten Tangenten ihn in den Berührungspunkten der gemeinsamen Berührungskreise der drei Kreise berühren.

Erkl. 136. In Fig. 156 sind der grösseren Deutlichkeit wegen nur zwei von den vier möglichen Berührungskreisen gezeichnet.

Erkl. 137. Ein Viereck ist Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander halbieren.

punkte der vier gesuchten Berührungskreise mit Kreis O.

Um vollends die Mittelpunkte zu finden, ziehe durch den Potenzpunkt R die Parallelen zu Or_1 und Or_2, diese Geraden schneiden die Halbmesser nach den zugehörigen Berührungspunkten in den betreffenden Mittelpunkten der Berührungskreise.

Ein anderes Mittel, die Mittelpunkte der Berührungskreise zu finden, liefert die Konstruktion von Aufgabe 143 b) (siehe Erkl. 128).

Die Polaren des Potenzpunkts in Bezug auf die Kreise O und Q findet man in diesem Falle besonders leicht. Denn da der Kreis P zu einem Punkte zusammengeschrumpft ist, so geht der Kreis um den Potenzpunkt, welcher alle drei Kreise rechtwinklig schneidet, durch P, hat also den Halbmesser RP. Er schneide Kreis O in k und l, Kreis Q in k_1 und l_1, so sind kl und $k_1 l_1$ die Polaren von R für diese Kreise. Letztere schneiden die Aehnlichkeitsaxen in den Punkten s und s_1, von wo aus sich an die Kreise O und Q Tangenten legen lassen, welche dieselben in den gesuchten Berührungspunkten b' und a_1 berühren. Der Halbmesser Qa_1 schneidet z. B. den Halbmesser Oa im Mittelpunkt X_1.

Die Aehnlichkeitsaxen kann man, wenn einer der Aehnlichkeitspunkte, z. B. A, ausserhalb des Zeichenraumes liegt, dadurch finden, dass sie senkrecht auf Or_1 bezw. Or_2 stehen.

Beweis. Es ist nur nachzuweisen, dass M′N′ Potenzlinie, $m_1 n_1$ äussere, $m_2 n_2$ innere Aehnlichkeitspolare für die Kreise O und Q ist, da die übrige Konstruktion eine direkte Uebertragung derjenigen von Aufgabe 143 c) ist.

Nun ist aber $ce \parallel dc_1$, weil cc_1 und de Durchmesser in Kreis O sind, folglich das Viereck $dc_1 ec$ ein Parallelogramm, weil die Diagonalen einander halbieren. Daher stimmt die eben angedeutete Konstruktion von MN, mn, M′N′, $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ genau mit derjenigen von Aufgabe 142 und Anmerkung 42 überein.

Determination. Es sind höchstens vier Lösungen möglich. Fällt eine derselben aus, so gibt sich dies dadurch kund, dass eine der Verbindungsgeraden Rr_1 oder Rr_2 den Kreis O berührt oder gar nicht schneidet.

Aufgabe 146. Zu zwei gegebenen Kreisen und einer gegebenen Geraden die Berührungskreise zu zeichnen.

Gegeben: G, Kreis um O, Kreis um Q.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Da einer der drei Kreise von Aufgabe 143 hier in eine Gerade, d. h. einen Kreis von unendlich grossem Halbmesser ausartet, fallen die Aehnlichkeitspunkte c und c_1 zwischen Kreis O und Gerade G, sowie die Aehnlichkeitspunkte h_1 und h_2 zwischen Kreis Q und Gerade G in die Endpunkte der auf G senkrechten Durchmesser der Kreise O und Q [siehe Antwort a) zu Frage 29].

Erkl. 138. Die Aehnlichkeitspunkte zwischen einem Kreis und einer Geraden sind die Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers, und zwar ist der von den Geraden entferntere Endpunkt der äussere Aehnlichkeitspunkt.

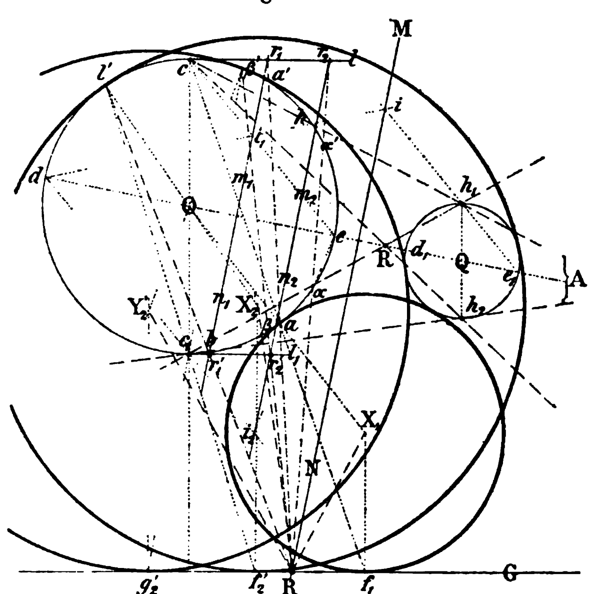
Da nun die Polare eines Punktes, welcher auf dem Kreise liegt, die Tangente in diesem Punkte ist (siehe die Antwort zu Frage 21), so sind die Tangenten cl und $c_1 l_1$ an Kreis O, welche zu G parallel gehen, die Aehnlichkeitspolaren zwischen Kreis O und der Geraden G.

Der Potenzpunkt R von O, Q, G fällt in die Gerade G selbst (siehe Frage 29, Antwort b).

Um die Mittelpunkte der Berührungskreise, z. B. X_1 zu finden, ist zu bedenken, dass die gemeinsame Zentrale zwischen Kreis X_1 und G homolog, also parallel zur gemeinsamen Zentrale von Kreis O und G ist. Diese gemeinsamen Zentralen sind aber die

Erkl. 139. Sieht man eine Gerade als Kreis von unendlich grossem Halbmesser an, so steht jeder Radius desselben auf der Geraden senkrecht, und jede Tangente fällt mit der Geraden zusammen.

Figur 157.



Lote von X_1 bezw. c auf G und ihre Fusspunkte sind homologe Punkte zu c oder c_1, liegen also mit einem dieser Punkte und dem betreffenden Berührungspunkt in gerader Linie.

Konstruktion. Konstruiere die Potenzlinie MN und für Kreis O die beiden Aehnlichkeitspolaren $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ zwischen Kreis O und Kreis Q nach Aufgabe 142.

Ziehe den zu G senkrechten Durchmesser cc_1 von Kreis O und in c und c_1 die Tangenten cl und $c_1 l_1$.

MN	schneidet	G	in	R,
$m_1 n_1$	"	cl	"	r_1
$m_1 n_1$	"	$c_1 l_1$	"	r'_1
$m_2 n_2$	"	cl	"	r_2
$m_2 n_2$	"	$c_1 l_1$	"	r'_2.

Die Verbindungsgeraden von R mit r_1, r'_1, r_2, r'_2 geben auf Kreis O die acht Berührungspunkte a, a', b, b', α, α', β, β'. Verbinde die Punkte a, a', α, α' mit c, die Punkte b, b', β, β' mit c_1. Die Verbindungsgeraden schneiden die Gerade G in f_1, f'_1, f_2, f'_2; g_1, g'_1, g_2, g'_2.

Erkl. 140. Zur Kontrolle der Zeichnung hat man folgende Proben: Je zwei Mittelpunkte, z. B. X_1 und X'_1 etc. liegen mit R auf einer Geraden, diese steht senkrecht auf einer der vier Aehnlichkeitsaxen ch_1, $c_1 h_2$, ch_2, $c_1 h_1$.

Die auf G in den Punkten f und g errichteten Lote schneiden die zugehörigen Halbmesser nach den Berührungspunkten in den Mittelpunkten X_1, X'_1, X_2, X'_2, Y_1, Y'_1, Y_2, Y'_2.

Beweis folgt aus der Analysis.

Determination siehe Aufgabe 92.

Aufgabe 147. Zu einer gegebenen Geraden, einem gegebenen Kreis und einem gegebenen Punkt die Berührungskreise zu zeichnen.

Gegeben: P, G, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Potenzlinie und Polare zwischen Kreis O und Punkt P werden nach Anmerkung 42 gefunden.

Der Potenzpunkt zwischen O, P, G fällt auf G, denn die Potenzlinie zwischen einem Punkt und einer Geraden ist diese letztere selbst [siehe Antwort b) zu Frage 29.]

Erkl. 141. Die Potenzlinie zwischen einem Punkt und einer Geraden ist die Gerade selbst.

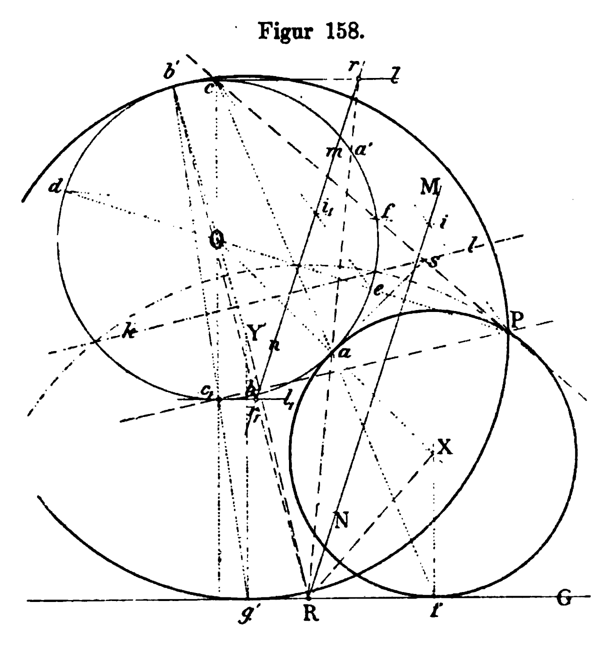
Die Aehnlichkeitspolaren des Kreises O zwischen O und G sind die zu G parallelen Tangenten des Kreises O (siehe die Analysis der vorigen Aufgabe).

Erkl. 142. Die Aehnlichkeitspolaren eines Kreises zwischen ihm und einer Geraden sind die zur Geraden parallelen Tangenten.

Die Mittelpunkte kann man wie in der vorigen Aufgabe finden.

Konstruktion. Zeichne die Potenzlinie MN und die Polare *mn* von Punkt P und Kreis O.

Figur 158.



Ziehe die zu G parallelen Tangenten *cl* und $c_1 l_1$ an Kreis O.

MN	schneidet	G	in	R,
mn	„	*cl*	„	*r*,
mn	„	$c_1 l_1$	„	r_1.

Ziehe R*r* und Rr_1, welche Kreis O in *a*, *a'*, *b*, *b'*, schneiden, so sind diese Punkte die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit Kreis O.

Ziehe *ca* und *ca'*, $c_1 b$ und $c_1 b'$, welche G bezw. in *f* und *f'*, *g* und *g'* schneiden.

Errichte auf G in *f*, *f'*, *g*, *g'* Lote, welche die Halbmesser nach den zugehörigen Berührungspunkten in X, X', Y, Y' schneiden, beschreibe um jeden dieser Punkte einen Kreis, welcher durch P geht.

Erkl. 143. Die Aehnlichkeitsaxen des gegebenen Systems sind die zwei Geraden P*c* und Pc_1.

Proben erhält man aus folgenden Bemerkungen: X und X_1 liegen auf der Senkrechten durch R zu *c*P, Y und Y_1 liegen auf der Senkrechten durch R zu c_1 P.

Ein Kreis um R mit RP schneidet Kreis O rechtwinklig, die Schnittsehne *kl* ist Polare von R für Kreis O, sie schneidet die Aehnlichkeitsaxen in *s* und s_1; die Tangenten von *s* und s_1 an Kreis O berühren diesen in den Berührungspunkten mit den gesuchten Kreisen.

Beweis folgt aus der Analysis (vgl. auch Aufgabe 146).

Determination siehe Aufgabe 86.

Aufgabe 148. Zu einem gegebenen Kreis und zwei gegebenen Punkten die Berührungskreise zu zeichnen.

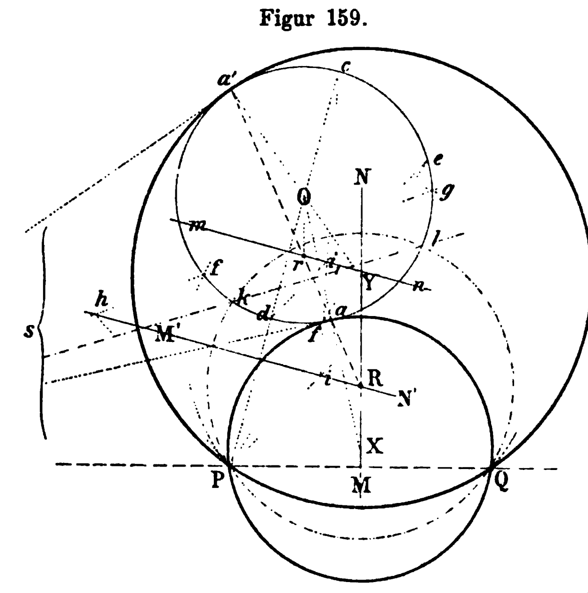
Gegeben: P, Q, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Aehnlichkeitspunkte zwischen P und O und zwischen Q und O fallen mit P und Q zusammen. Die Aehnlichkeitspunkte zwischen P und Q fallen in die Mitte von PQ und ins Unendliche, daher ist PQ die einzige Aehnlichkeitsaxe des Systems.

Die Potenzlinie von P und Q ist das Mittellot von PQ, auf diesem liegen die Mittelpunkte X und Y der Berührungskreise.

Figur 159.



Konstruktion. Zeichne nach Anmerkung 42 die Potenzlinie M'N' und Polare *mn* für Punkt P und Kreis O; erstere schneidet das Mittellot von PQ im Potenzpunkt R des Systems.

Der zu G senkrechte Durchmesser des Kreises O schneidet *mn* im Pol *r* von PQ.

R*r* schneidet Kreis O in *a* und *a'*. O*a* und O*a'* schneiden das Mittellot von PQ in X und Y.

Kreise um X und Y mit XP und YP sind die gesuchten.

Beweis. Punkt *r* ist Pol der Aehnlichkeitsaxe, denn letztere muss erstens auf *mn* liegen, weil *mn* Polare eines Punktes der Aehnlichkeitsaxe ist, zweitens auf der Senkrechten durch O zur Aehnlichkeitsaxe. [Siehe die Antwort zu Frage 21 und Antwort c) zu Frage 22, ferner Antwort *b*) zu Frage 29.]

Determination. Siehe Aufgabe 83.

Anmerkung 45. Will man auf die Aufgabe 148 die Konstruktion 143 b). anwenden, so ist nur die Potenzlinie M'N', nicht aber die Polare *mn* zu zeichnen. Dies lässt sich am einfachsten dadurch erreichen (siehe Erkl. 70), dass man einen beliebigen Kreis zeichnet, welcher durch P geht und Kreis O in *f* und *g* scheidet, die Tangente dieses Kreises in P trifft die Sehne *fg* in einem Punkte *h* der Potenzlinie. Ein Kreis um den Potenzpunkt (Schnitt von MN mit dem Mittellot der PQ) mit Halbmesser RP schneidet Kreis O rechtwinklig in *k* und *l*, *kl* ist die Polare von R in Bezug auf Kreis O.

Vom Schnittpunkt *s* der Polare *kl* und der Aehnlichkeitsaxe PQ lassen sich an Kreis O die Tangenten *sa* und *sa'* legen, deren Berührungspunkt zugleich die Berührungspunkte mit den gesuchten Kreisen sind.

Aufgabe 149. Zu einem gegebenen Kreis und zwei gegebenen Geraden die Berührungskreise zu zeichnen.

Gegeben: G, G_1, Kreis um O.

Gesucht: Kreis um X.

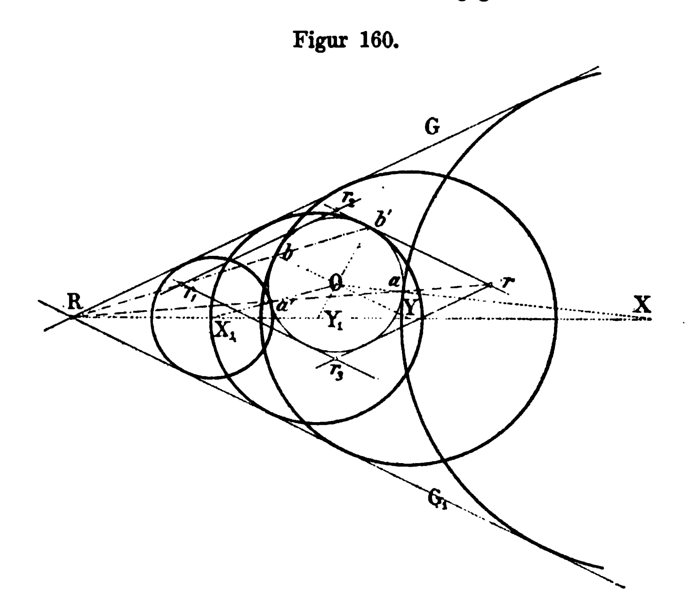
Analysis. Die Potenzlinie der beiden gegebenen Geraden ist die Halbierungsgerade eines ihrer Winkel, und zwar desjenigen, in welchem Kreis O liegt.

Die Potenzlinie zwischen Kreis O und jeder der Geraden ist die letztere selbst. Daher ist der Schnittpunkt R der beiden Geraden Potenzpunkt des Systems. Die Aehnlichkeitspolaren des Kreises O zwischen diesem und jeder der beiden Geraden sind die zu letzteren parallelen Tangenten des Kreises.

Erkl. 144. Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gleiche Kreise gleichartig berühren, liegen auf der Potenzlinie.

Da die beiden Geraden als Kreise von gleichem (unendlich grossem) Halbmesser angesehen werden können, so liegt der Mittelpunkt jedes Berührungskreises auf ihrer Potenzlinie, d. h. auf der Winkelhalbierungsgeraden.

Figur 160.



Konstruktion. Ziehe (Fig. 160) an den Kreis O die Tangentenpaare, welche zu G und G_1 parallel sind; dieselben schneiden einander in r, r_1, r_2, r_3; verbinde den Schnittpunkt R der gegebenen Geraden mit r, r_1, r_2, r_3. Die Verbindungsgeraden schneiden den Kreis in den Punktepaaren a, a'; b, b'.

Die Halbmesser des Kreises O nach diesen Punkten schneiden die Halbierungsgerade desjenigen Winkels zwischen G und G_1, innerhalb dessen der betreffende Berührungs-

punkt liegt, in den Mittelpunkten X, X_1; Y, Y_1.

Beweis folgt aus der Analysis.

Determination siehe Aufgabe 91.

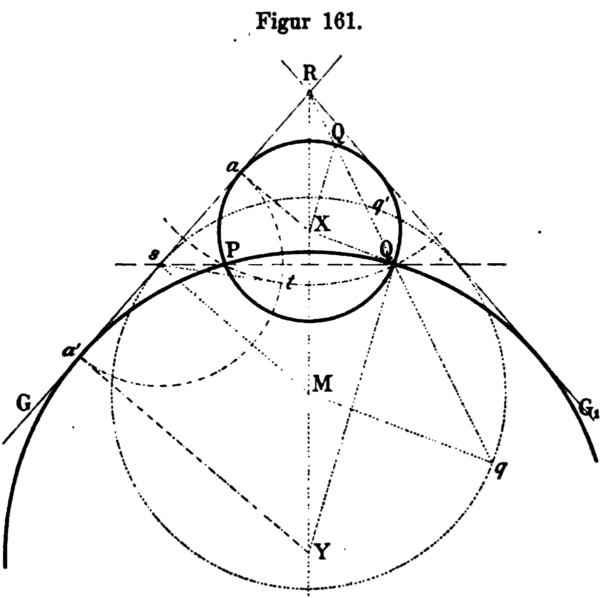
Aufgabe 150. Zu einer gegebenen Geraden und zwei gegebenen Punkten die Berührungskreise zu zeichnen.

Gegeben: G, P, Q.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Potenzlinie zwischen P und Q ist das Mittellot von PQ, die Potenzlinie zwischen P und G oder zwischen Q und G fällt mit der Geraden selbst zusammen (siehe Antwort zu Frage 29); daher fällt der Potenzpunkt des ganzen Systems in den Schnittpunkt R des Mittellots von PQ mit der Geraden G. Die Aehnlichkeitsaxe des Systems fällt mit der Geraden PQ zusammen, der einzige im Endlichen liegende Aehnlichkeitspunkt ist die Mitte von PQ. Die Polare der Punkte P und R in Bezug auf G ist diese selbst. Daher ist der Pol der Aehnlichkeitsaxe in Bezug auf G unbestimmt, und die Konstruktionen 143 a) und c) sind auf den vorliegenden Fall durch einfache Spezialisierung nicht direkt anwendbar.

Figur 161.



Die Polare des Potenzpunkts R in Bezug auf die Gerade G ist diese selbst, sie schneidet die Aehnlichkeitsaxe PQ in *s*.

Die Tangente von *s* an G fällt mit G zusammen, daher ist auch die in Aufgabe 143 b) gezeigte Konstruktion nicht direkt anwendbar.

Dagegen lässt sich an die Aufgabe 148 anknüpfen.

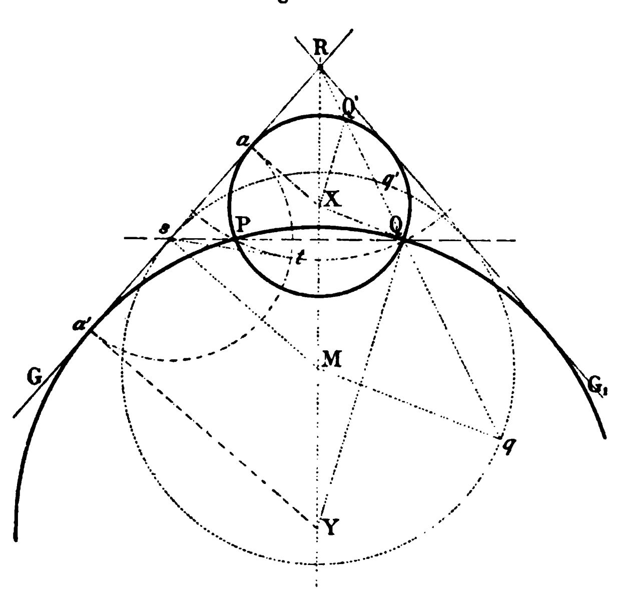
Denkt man sich in Fig. 159 um *s* mit $sa = sa'$ einen Kreis beschrieben, so schneidet derselbe, da sein Mittelpunkt auf den Potenzlinien *as* und *a's* der Kreispaare O, X und O, Y liegt, die Kreise O, X, Y rechtwinklig, ebenso aber jeden Kreis, der durch P und Q geht, weil PQ Potenzlinie für alle solche Kreise ist.

Dadurch ist die in Aufgabe 82 angegebene Konstruktion unter den allgemeinen Fall einbegriffen. Die Aufgabe lässt aber

mit Hilfe der Lehre von den Aehnlichkeitspunkten noch eine andere Auflösung zu:

Man denke sich einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt M auf dem Mittellot von PQ liegt, und welcher G in *s* berührt, so ist Punkt R Aehnlichkeitspunkt der Kreise X und M, und RQ ist Aehnlichkeitsstrahl. Dieser schneide Kreis X zum zweitenmale in Q′, Kreis M in *q* und *q′*, so sind Q und *q* einerseits, Q′ und *q′* andererseits homologe Punkte der Kreise X und M, daher sind die Halbmesser QX und *q*M parallel.

Figur 161.



Konstruktion. Zeichne einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt M auf dem Mittellot von PQ liegt, und welcher G in *s* berührt. Verbinde den Schnittpunkt R des Mittellots und der Geraden G mit Q, die Verbindungsgerade schneidet den Hilfskreis in *q* und *q′*; ziehe M*q* und M*q′* und die Parallelen dazu durch Q, welche das Mittellot in X und Y treffen, so sind die Kreise um X und Y, welche durch Q gehen, die gesuchten.

Beweis folgt aus der Analysis.

Determination siehe Aufgabe 82.

Aufgabe 151. Zu zwei gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkt die Berührungskreise zu zeichnen.

Gegeben: G, G_1, Q.

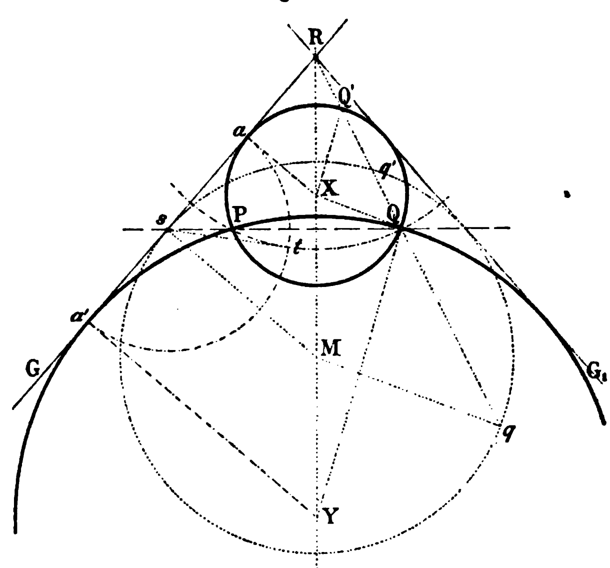
Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Auch diese Aufgabe lässt sich nicht direkt nach der Aufgabe 143 als Spezialfall auflösen, dagegen analog mit Aufgabe 148 durch die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten.

Der gesuchte Kreis um X und ein beliebiger Kreis um M, welcher die beiden Geraden G und G_1 berührt, haben den Schnittpunkt R von G und G_1 zum Aehnlichkeitspunkt.

RQ ist Aehnlichkeitsstrahl, folglich sind die Halbmesser nach den homologen Punkten, QX und qX, einander parallel.

Figur 161.



Konstruktion. Halbiere denjenigen Winkel zwischen G und G_1, in welchem Punkt Q liegt, beschreibe um einen beliebigen Punkt M der Halbierungsgeraden einen Kreis, der die Geraden berührt.

Ziehe RQ, welche den Hilfskreis q und q' schneidet; ziehe Mq und Mq' und die Parallelen dazu durch Q, welche die Halbierungsgerade in X und Y schneiden.

Kreise um X und Y mit XQ bezw. YQ sind die gesuchten.

Beweis folgt aus Analysis.

Determination siehe Aufgabe 85.

Anmerkung 46. Wesentliche Vereinfachungen der in den vorhergehenden Aufgaben gezeigten Konstruktionen treten ein, sobald von den gegebenen Kreisen oder geraden Linien einige oder alle einander berühren. Dieser Fall kommt in der Praxis, besonders in der gothischen Ornamentik, häufig vor und soll deshalb in einigen Beispielen noch besonders behandelt werden.

Aufgabe 152. Es sind drei Kreise gegeben, von welchen die beiden ersten den dritten gleichartig berühren; einen Kreis zu zeichnen, welcher die drei Kreise gleichartig berührt.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Voraussetzung: Kreis um P berührt die Kreise um O und Q gleichartig.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. (Siehe Fig. 162.) Kreis P und Kreis X_1 berühren die beiden Kreise O und Q gleichartig, folglich geht ihre Potenzlinie durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und Q. [Siehe den Lehrsatz c) in der Antwort zu Frage 32.] Da aber Kreis X_1 den Kreis P berührt, so fällt ihre Potenzlinie zusammen mit der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt c_1 (siehe die Antwort zu Frage 24). Daher findet man den Berührungspunkt c_1 auf Kreis P, wenn man vom äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kreise O und Q die Tangente an Kreis P legt.

Erkl. 145. Werden zwei Kreise von zwei anderen gleichartig berührt, so ist die Potenzlinie des einen Kreispaars äusserer Aehnlichkeitsstrahl des anderen Kreispaars, und die Aehnlichkeitspunkte des einen Paars liegen auf der Potenzlinie des anderen Paars.

Erkl. 146. Die Potenzlinie zweier Kreise, die einander berühren, ist die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt.

Nach dem vorhin benützten Satze [Antwort c) zu Frage 32] liegt ferner der Aehnlichkeitspunkt B_1 der Kreise P und X_1 auf der Potenzlinie RR_1 der Kreise O und Q. Somit ist B_1 der Schnittpunkt des Halbmessers Pc_1 mit RR_1.

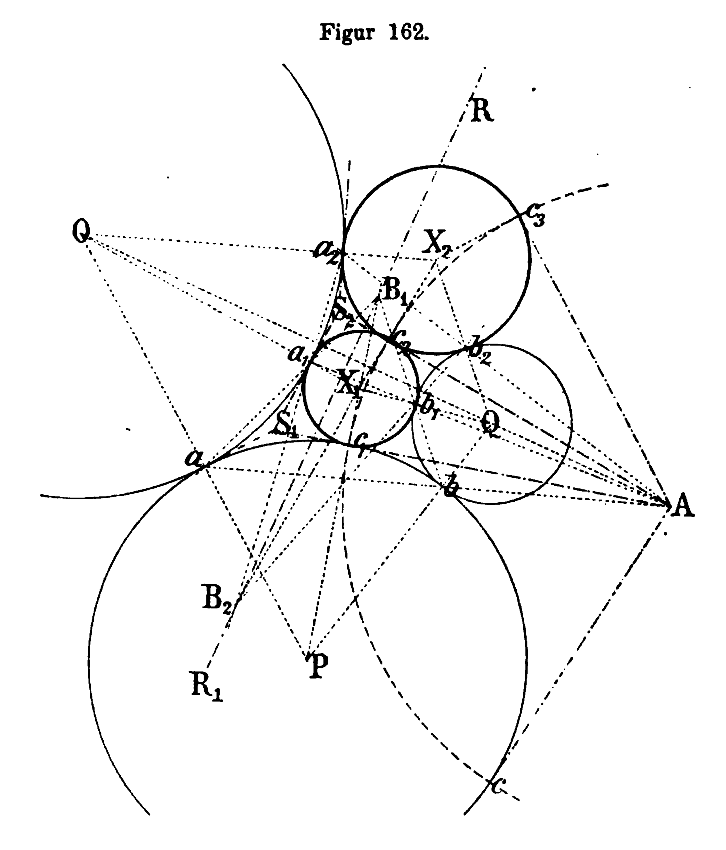
Nach Satz a) in der Antwort zu Frage 32 gehen ferner die Berührungssehnen aa_1 und bb_1 der Kreise O und Q mit den Kreisen P und X_1 durch B_1, wie umgekehrt die Berührungssehnen ab und a_1b_1 durch A gehen.

Dadurch findet man die Berührungspunkte a_1 und b_1 von Kreis X_1 mit O und Q, und die Halbmesser Oa_1 und Qb_1 schneiden einander in dem auf Pc_1 liegenden Mittelpunkt X.

Erkl. 147. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig (ungleichartig) berührt, so ist die Berührungssehne des dritten Kreises äusserer (innerer) Aehnlichkeitsstrahl der zwei ersten Kreise.

Eine andere Lösung ergibt sich aus der Erwägung, dass die Potenzlinien der drei Kreise O, P, X, welche einander berühren, die Tangenten in den Berührungspunkten sind. Von letzteren kennt man zwei, nämlich a und c_1, der Potenzpunkt S_1 der drei Kreise ist also der Schnittpunkt von Ac_1 mit der Tangente an die Kreise O und P in ihrem Berührungspunkt a; die zweite Tangente von S_1 an Kreis O liefert den Berührungspunkt a_1. Die gleiche Betrachtung, angewendet auf die Kreise Q, P, X_1 würde den Berührungspunkt b_1 geben.

Figur 162.



Konstruktion. a). Bestimme den äusseren Aehnlichkeitspunkt A und die Potenzlinie RR_1 der Kreise O und Q, lege von A an Kreis P die Tangente Ac_1, ziehe Pc_1, welche die Potenzlinie RR_1 in B_1 trifft. Verbinde B_1 mit den Berührungspunkten a und b zwischen Kreis P einer- und den Kreisen O und Q andererseits. Die Verbindungsgeraden treffen die Kreise O und Q in a_1 bezw. b_1. Pc_1, Ob_1, Oa_1 schneiden einander in X_1. Ein Kreis um X_1 mit

$$X_1a_1 = X_1b_1 = X_1c_1$$

ist der gesuchte. Oder:

b). Lege vom äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kreise O und Q die Tangente Ac_1 an Kreis P. Ziehe die gemeinsame Tangente der Kreise O und P im Berührungspunkt a. Beide Tangenten schneiden einander in S_1. Lege von S_1 an Kreis O die Tangente S_1a_1; ziehe Oa_1 und Pc_1, welche einander in X_1 schneiden.

Beweis siehe Analysis.

Anmerkung 47. In Figur 162 ist an den Kreis X_1 noch ein weiterer Berührungskreis gezeichnet, welcher aus O, Q, X_1 gerade so konstruiert wird, wie X_1 aus O, Q, P. An diesen liesse sich wieder ein Berührungskreis zeichnen u. s. w., bis einer der Berührungskreise die äussere gemeinschaftliche Tangente der Kreise O und Q schneidet; von da an ist kein weiterer äusserer, sondern nur noch umschliessende Berührungskreise möglich.

Anmerkung 48. Da die Tangenten Ac, Ac_1, Ac_2, Ac_3 u. s. w. alle gleich sind, so schneidet ein um A mit Ac beschriebener Kreis sämtliche Kreise rechtwinklig, welche die Kreise O und Q gleichartig berühren.

Nach dem Tangentensatze ist:

$$\overline{Aa}^2 = Aa \,.\, Ab = Aa_1 \,.\, Ab_1 = Aa_2 \,.\, Ab_2.$$

Die Produkte $Aa \,.\, Ab$, $Aa_1 \,.\, Ab_1$ u. s. w. sind nach der Antwort zu Frage 27 die gemeinschaftliche Potenz der Kreise O und Q, bezogen auf ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt, also unabhängig von Kreis P. Man nennt jenen Kreis, dessen Halbmesser, ins Quadrat erhoben, gleich der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise in Bezug auf ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt ist, den äusseren Potenzkreis der zwei gegebenen Kreise. Ebenso gibt es einen inneren Potenzkreis, dessen Mittelpunkt der innere Aehnlichkeitspunkt der zwei Kreise und dessen Halbmesser, mit sich selbst multipliziert, die gemeinschaftliche Potenz in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunkt ist. Eine Anwendung von dem letzteren zeigt die nächste Aufgabe für einen spezielleren Fall.

Aufgabe 153. Zwei Kreise berühren einander von aussen und werden von einem dritten Kreise umschliessend berührt. Kreise zu zeichnen, welche die beiden ersten von aussen und den dritten von innen berühren.

Gegeben: Kreis um O, Kreis um Q, Kreis um P.

Voraussetzung: Kreis um Q berührt den Kreis um P von aussen. Kreis um O berührt die Kreise um Q und P umschliessend.

Gesucht: Kreis um X.

Analysis. Die Analysis von Aufgabe 152 gilt auch für diese Aufgabe, jedoch mit einigen Modifikationen:

Da die Kreise P und X_1 das Kreispaar O und Q ungleichartig berühren, so tritt an Stelle des äusseren der innere Aehnlichkeitspunkt. Die Potenzlinie der Kreise O und Q geht, da sie einander berühren, durch ihren Berührungspunkt A_0 und ist dort Tangente.

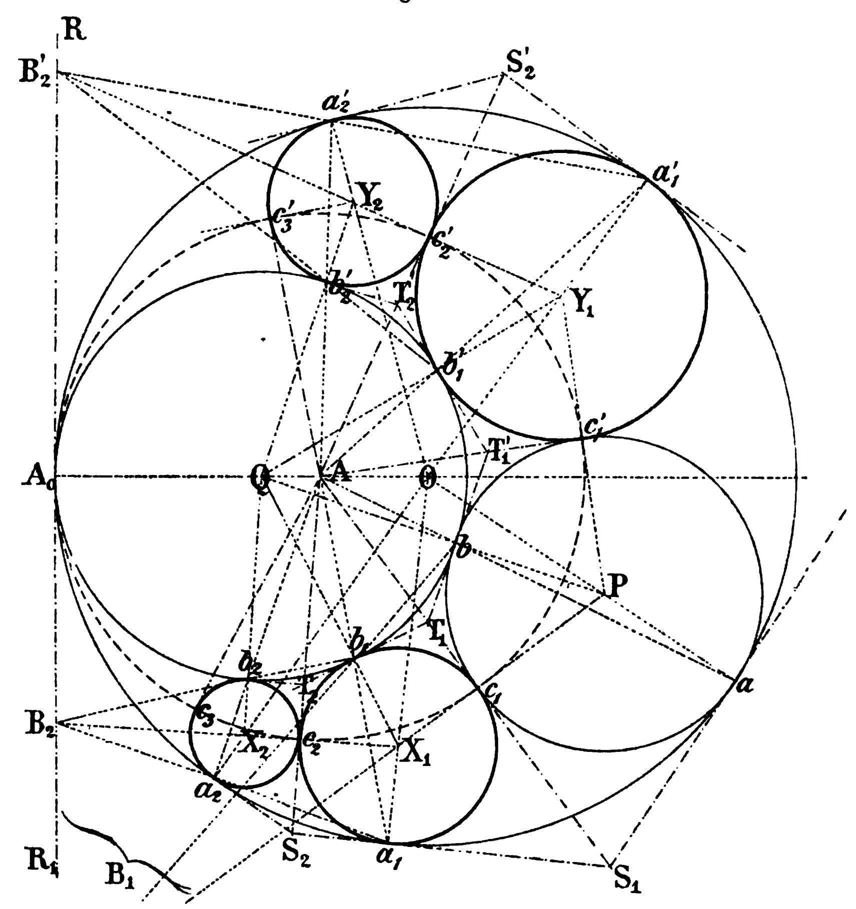
Konstruktion. Wie bei Aufgabe 152, nur dass statt des äusseren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und Q der innere benützt wird.

In Fig. 163 sind auch die Potenzpunkte

T_1, T_2, T_3, T'_1 der Kreistripel Q, P, X_1; Q, X_1, X_2; Q, Y_1, Y_2 benützt.

Beweis folgt aus der Analysis.

Figur 163.



Anmerkung 49. In Figur 163 wurde eine ganze Reihe von Kreisen X_1, X_2 .... gezeichnet, welche je den vorhergehenden und den Kreis Q von aussen, den Kreis O von innen berühren. Diese Reihe lässt sich beliebig weit fortsetzen, wobei die Kreise immer kleiner werden, nach einem Gesetze, das weiter unten entwickelt werden wird.

Der innere Potenzkreis von O und Q geht in Fig. 163 durch den Berührungspunkt A_0, denn in diesem Punkte fallen zwei homologe Punkte beider Kreise in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunkt zusammen.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

899. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 898. — Seite 177—192.
Mit 8 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach **System Kleyer** bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 898. — Seite 177—192. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Potenzkreise. — Prinzip der reciproken Radien. — Malfattisches Problem.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und **zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen Kapiteln angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den Schulunterricht** geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen **oft keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen** vorkommenden **Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

G. Potenzkreise. Prinzip der reciproken Radien. Malfattisches Problem.

Frage 35. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei gegebenen Kreisen und ihren Potenzkreisen?

Antwort. a). In Figur 164 liegen die zwei gegebenen Kreise O und Q auseinander, sie werden von einem dritten Kreis Y ungleichartig in a' und b' berührt, und B ist der innere Aehnlichkeitspunkt von O und Q, daher ist nach der Antwort zu Frage 27 das Produkt $Ba'.Bb'$ konstant, und der Punkt B liegt zwischen a' und b'. Da nun der Halbmesser des inneren Potenzkreises mittlere Proportionale zwischen Ba' und Bb' und B sein Mittelpunkt ist, so schneidet der innere Potenzkreis den Berührungskreis in zwei Punkten f und f_1. Bf möge den Kreis Y zum zweitenmale in f'_1 treffen, so ist nach dem Sehnensatz:

$$Ba'.Bb' = Bf_1.Bf = \varrho.Bf'_1,$$

wenn ϱ den Halbmesser des Potenzkreises bedeutet. Aber nach der Definition des letzteren ist $Ba'.Bb' = \varrho^2$, folglich ist $Bf'_1 = \varrho$, oder f'_1 fällt mit f_1 zusammen und die Sehne ff_1 ist gleich 2ϱ, d. h. gleich dem Durchmesser des inneren Potenzkreises.

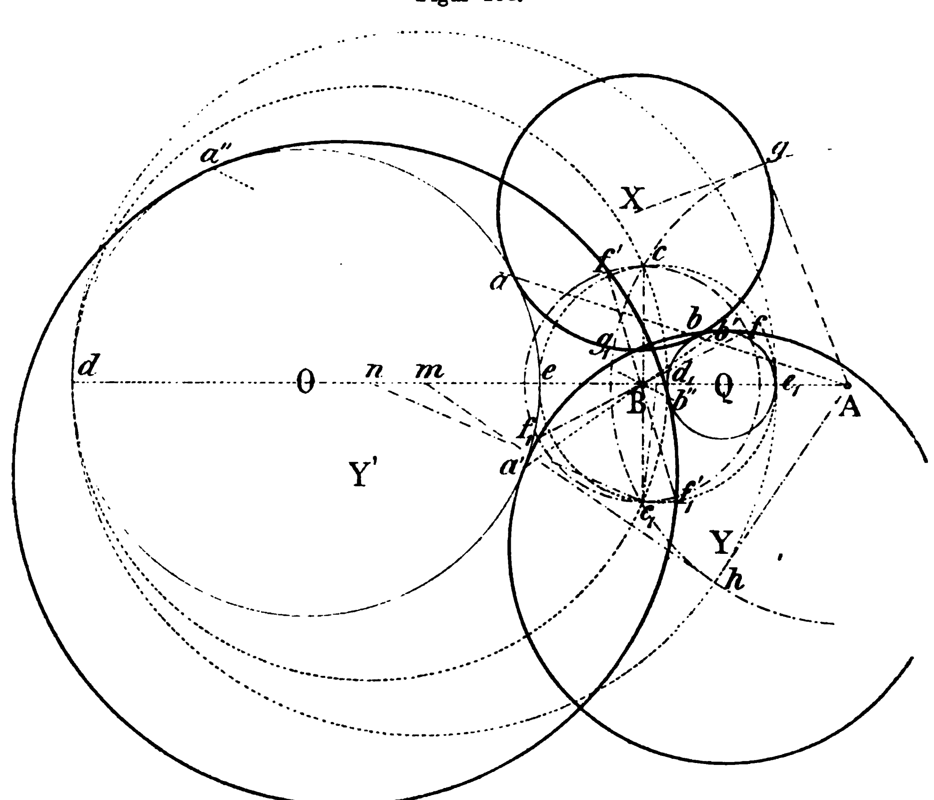
b). Liegt dagegen Kreis Q in Kreis O (Fig. 165) und berührt Kreis X den letzteren von innen in a, den Kreis Q umschliessend in b, so liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt A von O und Q innerhalb des Kreises Q zwischen a und b, der äussere Potenzkreis kann daher in diesem Falle den Kreis X nicht rechtwinklig schneiden, sondern wird von ihm halbiert, was gerade so wie bei a) zu beweisen ist.

c). Schneiden jedoch die Kreise O und X einander (Fig. 166), so liegt der äussere Aehnlichkeitspunkt A ausserhalb der Berührungssehne ab des gleichartig berührenden Kreises X, und der innere Aehnlichkeitspunkt B liegt ausserhalb der Berührungssehne $a'b'$ des ungleichartig berührenden Kreises Y. Sowohl der äussere als der innere Potenzkreis schneiden also vermöge ihrer Definition die zugehörigen Berührungskreise rechtwinklig.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich somit für die Potenzkreise folgende Sätze:

I. Liegen zwei Kreise auseinander, so schneidet ihr äusserer Potenzkreis jeden

Figur 164.

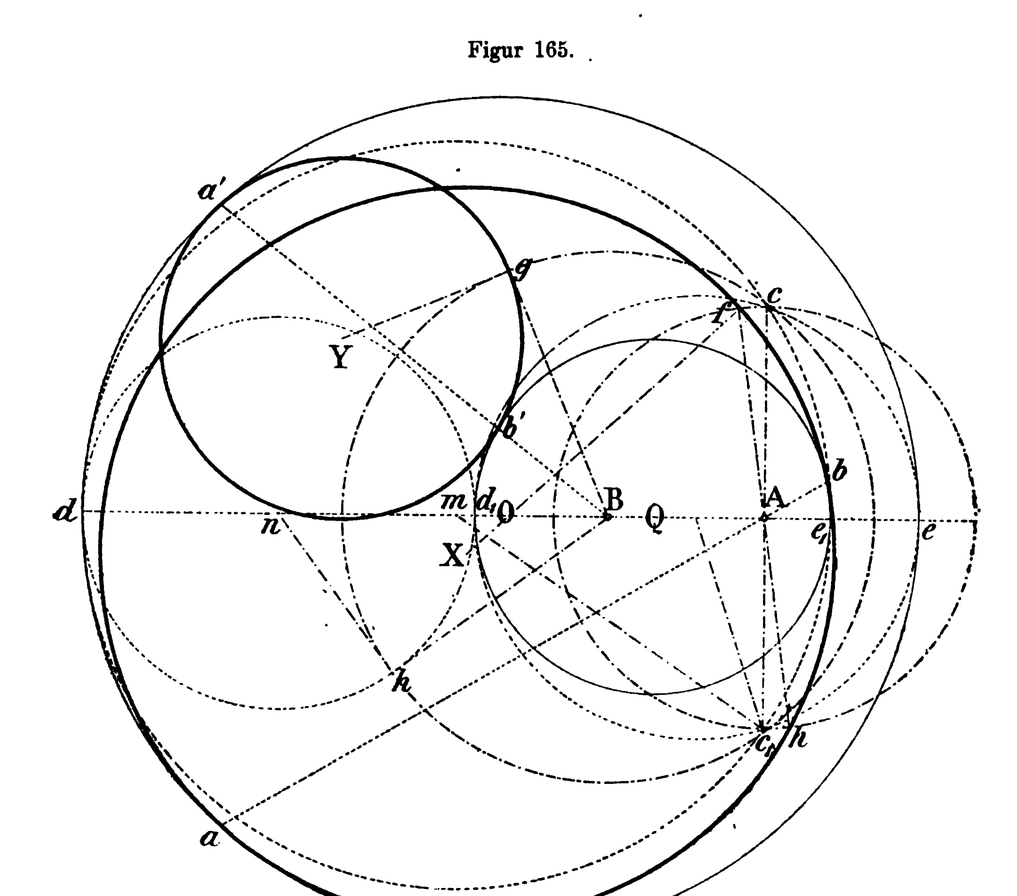


Kreis rechtwinklig, welcher die beiden gegebenen Kreise gleichartig (von aussen oder umschliessend) berührt; ihr innerer Potenzkreis wird nach einem Durchmesser geschnitten von jedem Kreise, welcher die gegebenen Kreise ungleichartig (den einen von aussen, den andern umschliessend) berührt.

II. Liegt ein Kreis im andern, so halbiert jeder gleichartig (von innen und um-

schliessend) berührende Berührungskreis den äusseren Potenzkreis; jeder ungleich-

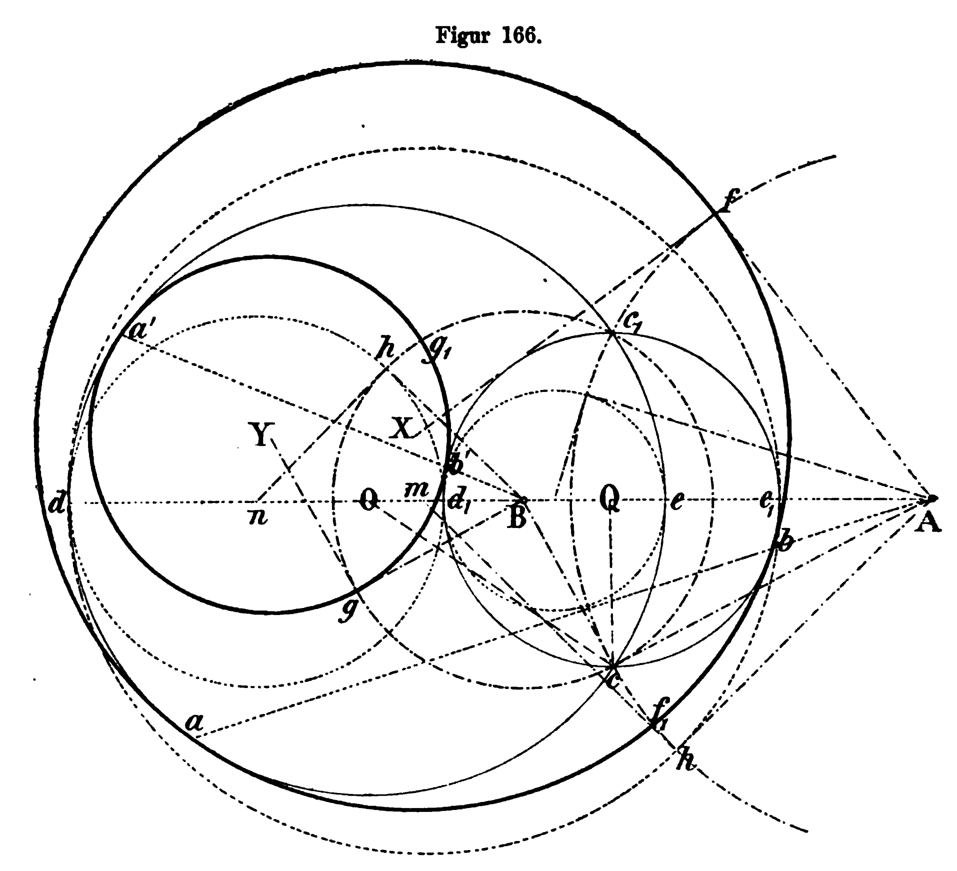
Figur 165.



artig (von innen und von aussen) berührende Berührungskreis wird vom inneren Potenzkreis rechtwinklig geschnitten.

III. Schneiden zwei Kreise einander, so werden ihre gleichartig (beide von aussen oder beide von innen oder beide umschliessend) berührenden Berührungskreise vom äusseren Potenzkreis, ihre ungleichartig (von aussen und von innen)

Figur 166.



berührenden Berührungskreise vom inneren Potenzkreis rechtwinklig geschnitten.

Anmerkung 50. Um die Unterscheidung zwischen den in der vorigen Frage erwähnten Fällen nicht stets machen zu müssen, nennt man Orthogonalkreis eines gegebenen einen solchen, welcher denselben entweder rechtwinklig schneidet oder von ihm nach einem Durchmesser geschnitten (halbiert) wird. Man kann daher die in der vorigen Frage beantworteten Sätze kurz so aussprechen:

Die beiden Potenzkreise zweier gegebenen Kreise sind Orthogonalkreise für alle Kreise, welche die gegebenen gleichzeitig berühren, und zwar der äussere Potenzkreis für die gleichartig, der innere für die ungleichartig berührenden.

Anmerkung 51. Wegen der Gleichheit der Potenz $Aa \cdot Ab$ oder $Ba' \cdot Bb'$ für die Abschnitte auf einem Aehnlichkeitsstrahl vom Aehnlichkeitspunkt bis zu zwei nicht homologen Schnittpunkten nennt man die letzteren potenzhaltende Punkte des äusseren bezw. inneren Aehnlichkeitspunkts. Legt man durch zwei solche Punkte einen Kreis und zieht von Aehnlichkeitspunkt eine Sekante (bezw. Sehne) in letzteren, so haben ihre Schnittpunkte mit diesem Kreise dieselbe Potenz in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt, sind also ebenfalls potenzhaltende Punkte. Daher nennt man überhaupt potenzhaltende Punkte des äusseren bezw. inneren Aehnlichkeitspunkts zweier Kreise zwei solche Punkte auf einem Aehnlichkeits-

strahl, für welche das Produkt ihrer Abstände vom Aehnlichkeitspunkt gleich der gemeinschaftlichen Potenz der zwei Kreise in Bezug auf den betreffenden Aehnlichkeitspunkt ist.

Ebenso sagt man von jedem Kreise X oder Y, dessen Potenz in Bezug auf einen der beiden Aehnlichkeitspunkte A oder B gleichartig (äusserlich oder innerlich) und gleich ist der zu demselben Aehnlichkeitspunkt gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der Kreise O und Q: er sei ein potenzhaltender Kreis in Bezug auf den jedesmaligen Aehnlichkeitspunkt. Daher ist jeder Kreis, welcher durch zwei potenzhaltende Punkte geht, ein potenzhaltender Kreis. Jeder potenzhaltende Kreis wird von einer Sekante des zugehörigen Aehnlichkeitspunkts in zwei potenzhaltenden Punkten geschnitten. Legt man vom zugehörigen Aehnlichkeitspunkt an einen potenzhaltenden Kreis eine Tangente, oder, wenn dies nicht möglich ist, zieht man durch diesen Aehnlichkeitspunkt in dem potenzhaltenden Kreis die kürzeste Halbsehne, so ist deren Quadrat nach dem Tangenten- oder Sehnensatz gleich der gemeinschaftlichen Potenz des betreffenden Aehnlichkeitspunkts, also sie selbst gleich dem Halbmesser des zugehörigen Potenzkreises. Man erhält somit den Satz:

Jeder potenzhaltende Kreis schneidet den Potenzkreis des zugehörigen Aehnlichkeitspunkts entweder rechtwinklig oder nach einem Durchmesser. (Der Potenzkreis ist Orthogonalkreis aller potenzhaltenden Kreise des zugehörigen Aehnlichkeitspunkts.)

Insbesondere sind auch diejenigen Kreise potenzhaltend, welche die gegebenen Kreise in ihren Scheiteln berühren; so sind die Kreise mit den Durchmessern de_1 und d_1e potenzhaltend für den äusseren, die Kreise mit den Durchmessern dd_1 und ee_1 potenzhaltend für den inneren Aehnlichkeitspunkt (siehe Fig. 164 bis 166). Man erhält daher bei auseinander liegenden Kreisen den äusseren Potenzkreis, bei Kreisen, von denen der kleine im grossen liegt, den inneren, wenn man im ersten Falle vom äusseren Aehnlichkeitspunkt an einen der Kreise mit den Durchmessern d_1e oder de_1, im zweiten Falle vom inneren Aehnlichkeitspunkt an einen der Kreise mit Durchmesser dd_1 oder ee_1 die Tangente Ah bezw. Bh legt. Umgekehrt erhält man im ersten Falle den inneren, im zweiten Falle den äusseren Potenzkreis, wenn man durch den betreffenden Aehnlichkeitspunkt in einem der zugehörigen potenzhaltenden Kreise, welche die gegebenen Kreise in den Scheiteln berühren, die kürzeste Halbsehne zieht (Fig. 164 und 165).

Schneiden die beiden Kreise einander in den Punkten c und c_1 (Fig. 166), so fallen in jedem dieser Punkte zwei potenzhaltende Punkte zusammen, und zwar sowohl für den äusseren als für den inneren Potenzkreis. Die beiden Potenzkreise gehen daher durch die Schnittpunkte der gegebenen Kreise.

Anmerkung 52. Bezeichnet man die Mitte von de_1 mit m, von dd_1 mit n, den Halbmesser des Kreises m mit k, den des Kreises n mit k_1, den Halbmesser von Kreis O mit r, denjenigen von Kreis Q mit r_1, die Zentrale OQ mit c, den Halbmesser des äusseren Potenzkreises mit ϱ_a, den des inneren mit ϱ_i, so ergibt die Betrachtung der Fig. 164 bis 166, unter Benützung des Pythagoräers, ferner der Thatsache, dass die Zentrale von den Aehnlichkeitspunkten im Verhältnis der Halbmesser aussen und innen geteilt wird, und dass die Kreise m bezw. n die Potenzkreise zu Orthogonalkreisen haben:

Für Fig. 164:

$$\mathrm{OA} = \frac{cr}{r-r_1}, \qquad \mathrm{QA} = \frac{cr_1}{r-r_1}$$

$$\mathrm{OB} = \frac{cr}{r+r_1}, \qquad \mathrm{QB} = \frac{cr_1}{r+r_1},$$

$$\mathrm{AB} = \frac{2crr_1}{r^2-r_1^2}.$$

$$k = \frac{c+(r+r_1)}{2}, \qquad k_1 = \frac{c+(r-r_1)}{2},$$

$$Om = \frac{c-(r-r_1)}{2}, \qquad On = \frac{c-(r+r_1)}{2},$$

$$Qm = \frac{c+(r-r_1)}{2}, \qquad Qn = \frac{c+(r+r_1)}{2},$$

$$Am = \frac{(r-r_1)^2+c(r+r_1)}{2(r-r_1)}, \qquad Bn = \frac{(r+r_1)^2+c(r-r_1)}{2(r+r_1)}.$$

$$\varrho_a^2 = \overline{Am}^2 - k^2 = \frac{rr_1[c^2-(r-r_1)^2]}{(r-r_1)^2},$$

$$\varrho_i^2 = k_1^2 - \overline{Bn}^2 = \frac{rr_1[c^2-(r+r_1)^2]}{(r+r_1)^2}.$$

Für Fig. 165:

$$OA = \frac{cr}{r-r_1}, \qquad QA = \frac{cr_1}{r-r_1},$$

$$OB = \frac{cr}{r+r_1}, \qquad QB = \frac{cr_1}{r+r_1},$$

$$AB = \frac{2crr_1}{r^2-r_1^2}.$$

$$k = \frac{c+(r+r_1)}{2}, \qquad k_1 = \frac{c+(r-r_1)}{2},$$

$$Om = \frac{(r-r_1)-c}{2}, \qquad On = \frac{(r+r_1)-c}{2},$$

$$Qm = \frac{(r-r_1)+c}{2}, \qquad Qn = \frac{(r+r_1)+c}{2}.$$

$$Am = \frac{(r-r_1)^2+c(r+r_1)}{2(r-r_1)}, \qquad Bn = \frac{(r+r_1)^2+c(r-r_1)}{2(r+r_1)}$$

$$\varrho_a^2 = k^2 - \overline{Am}^2 = \frac{rr_1[(r-r_1)^2-c^2]}{(r-r_1)^2},$$

$$\varrho_i^2 = \overline{Bn}^2 - k_1^2 = \frac{rr_1[(r+r_1)^2-c^2]}{(r+r)^2}.$$

Für Fig. 166:

$$OA = \frac{cr}{r-r_1}. \qquad QA = \frac{cr_1}{r-r_1},$$

$$OB = \frac{cr}{r+r_1}, \qquad QB = \frac{cr_1}{r+r_1},$$

$$AB = \frac{2crr_1}{r^2-r_1^2}.$$

$$k = \frac{c+(r+r_1)}{2}, \qquad k_1 = \frac{c+(r-r_1)}{2},$$

$$Om = \frac{c-(r-r_1)}{2}, \qquad On = \frac{(r+r_1)-c}{2},$$

$$Qm = \frac{c+(r-r_1)}{2}, \qquad Qn = \frac{c+(r+r_1)}{2}.$$

$$Am = \frac{(r-r_1)^2+c(r+r_1)}{2(r-r_1)}, \qquad Bn = \frac{(r+r_1)^2+c(r-r_1)}{2(r+r_1)}.$$

$$\varrho_a^2 = \overline{Am}^2 - k^2 = \frac{rr_1[c^2-(r-r_1)^2]}{(r-r_1)^2},$$

$$\varrho_i^2 = \overline{Bn}^2 - k_1^2 = \frac{rr_1[(r+r_1)^2-c^2]}{(r+r_1)^2}.$$

Frage 36. Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Potenzkreisen zweier gegebener Kreise?

Antwort. Aus den in Anmerkung 52 entwickelten Werten von ϱ_a und ϱ_i findet man durch eine leichte Rechnung:

Für Fig. 164:

$$\varrho_a^2 - \varrho_i^2 = \overline{AB}^2,$$

Für Fig. 165:

$$\varrho_i^2 - \varrho_a^2 = \overline{AB}^2,$$

Für Fig. 166:

$$\varrho_a^2 + \varrho_b^2 = \overline{AB}^2.$$

Das heisst: Liegen die gegebenen Kreise auseinander, so halbiert der äussere Potenzkreis den inneren; liegt der kleine Kreis im grossen, so halbiert der innere Potenzkreis den äusseren; schneiden beide Kreise einander, so schneiden die Potenzkreise einander rechtwinklig.

Anmerkung 53. Aus den Formeln von Anmerkung 52 ergibt sich ferner durch eine leichte Rechnung, dass der Schnittpunkt der beiden Potenzkreise im ersten Fall zugleich der Schnittpunkt der beiden potenzhaltenden Scheitelkreise des inneren Aehnlichkeitspunktes ist; im zweiten Falle schneiden die Potenzkreise einander im Schnittpunkt der potenzhaltenden Scheitelkreise des äusseren Aehnlichkeitspunkts; im dritten Fall fällt der Schnittpunkt der Potenzkreise mit demjenigen der gegebenen Kreise zusammen.

Frage 37. Bestehen noch weitere wichtige Beziehungen zwischen zwei gegebenen Kreisen und ihren Potenzkreisen, und welche?

Erkl. 148. Unter dem Winkel, welchen zwei Kreise miteinander bilden, versteht man den Winkel, welchen ihre Tangenten im Schnittpunkt miteinander bilden.

Antwort. a). Schneiden zwei Kreise einander, so werden die Winkel, unter welchen sie einander schneiden, von den Potenzkreisen halbiert.

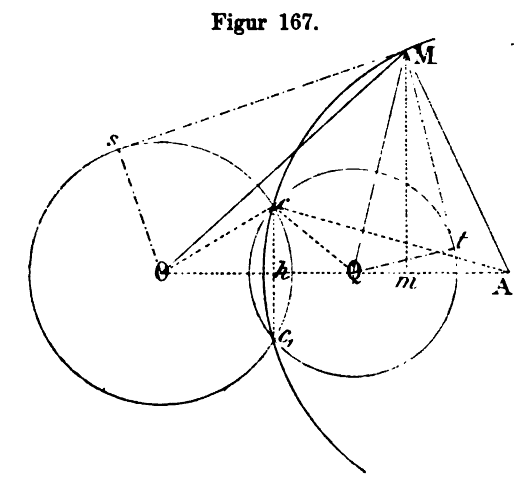
b). Die Potenzen eines beliebigen Punkts eines der Potenzkreise in Bezug auf beide gegebenen Kreise verhalten sich wie die Halbmesser der letzteren.

Beweis siehe Anmerkung 54 und 55.

Anmerkung 54. Zieht man in Fig. 166 die Strecken Oc und Qc, so ist die Grundlinie OQ des Dreiecks OcQ durch A und B aussen und innen im Verhältnis von Oc zu Qc geteilt. Nun lautet ein Satz der Planimetrie: „Teilen in einem Dreieck zwei Geraden von der Spitze aus die Grundlinie aussen und innen im Verhältnis der anstossenden Seiten, so sind diese zwei Geraden die Halbierungsgeraden des Winkels an der Spitze und seines Aussenwinkels“ (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.). Somit sind die Halbmesser der Potenzkreise, Ac und Bc, die Halbierungsgeraden der Winkel, welche die Halbmesser der gegebenen Kreise in ihrem Schnittpunkte miteinander bilden. Da nun die Tangenten auf den Halbmessern senkrecht stehen, so sind die Tangenten der Potenzkreise in c die Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den Tangenten der Kreise O und Q. Unter dem Winkel, welchen zwei Kreise miteinander bilden, versteht man aber den Winkel, welchen ihre Tangenten im Schnittpunkt miteinander bilden, damit ist der Satz a) in der vorigen Antwort bewiesen.

Anmerkung 55. In Fig. 167 sei A der Mittelpunkt eines beliebigen Kreises, welcher durch die Schnittpunkte c und c_1 der Kreise O und Q hindurchgeht. Von einem beliebigen Punkte M dieses Kreises aus seien die Tangenten Ms und Mt an die Kreise O und Q gezogen, ferner sei auf OQ das Lot Mm gefällt, OM, QM, AM und cc_1 gezogen, welch letztere OQ in h trifft. Nun ist nach dem Pythagoräer:

Figur 167.



$$\overline{Ms}^2 = \overline{MO}^2 - r^2,$$

$$\overline{Mt}^2 = \overline{MQ}^2 - r_1^2,$$

nach dem verallgemeinerten Pythagoräer ist aber:

$$\overline{MO}^2 = \overline{OA}^2 + \varrho^2 - 2OA.Am,$$

$$\overline{MQ}^2 = \overline{QA}^2 + \varrho^2 - 2QA.Am.$$

Daher:

$$\overline{Ms}^2 = \overline{OA}^2 + \varrho^2 - r^2 - 2OA.Am,$$

und

$$\overline{Mt}^2 = \overline{QA}^2 + \varrho^2 - r^2 - 2QA.Am,$$

aber nach Erkl. 68 ist:

$$\varrho^2 - r^2 = \overline{Ac}^2 - \overline{Oc}^2 = \overline{Ah}^2 - \overline{Oh}^2 = (Ah + Oh)(Ah - Oh) = AO(Ah - Oh),$$

$$\varrho^2 - r_1^2 = \overline{Ac}^2 - \overline{Qc}^2 = \overline{Ah}^2 - \overline{Qh}^2 = (Ah + Qh)(Ah - Qh) = AQ(Ah - Qh).$$

Daher:

$$\overline{Ms}^2 = AO(AO + Ah - Oh - 2Am) = AO(2Ah - 2Am),$$

$$\overline{Mt}^2 = AQ(AQ + Ah + Qh - 2Am) = AQ(2Ah - 2Am).$$

Es ist daher:

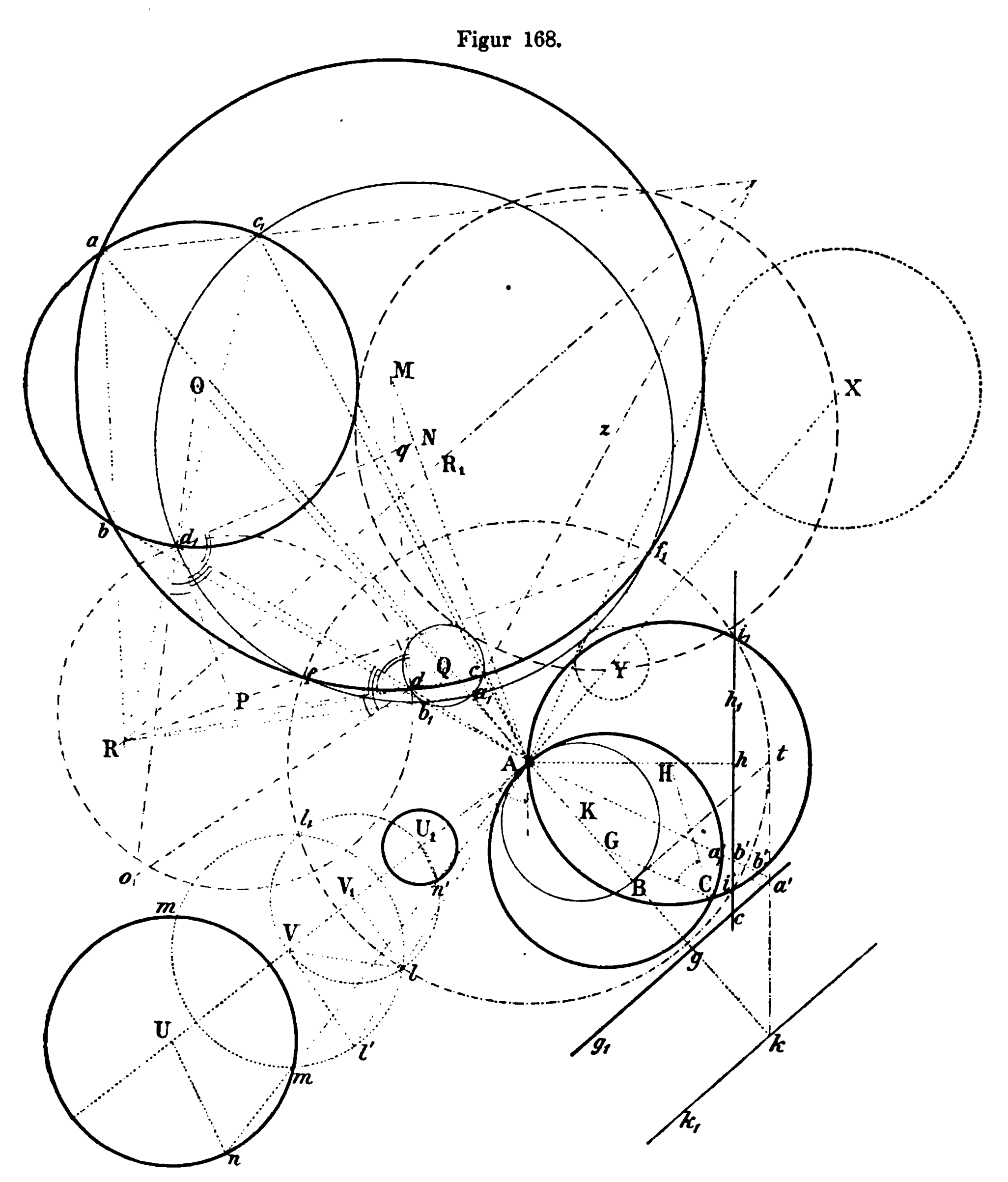
$$\overline{Ms}^2 : \overline{Mt}^2 = AO : AQ.$$

Man hat daher den allgemeinen Satz gewonnen:

Geht durch die Schnittpunkte zweier Kreise ein dritter Kreis, und man legt von irgend einem Punkte des dritten Kreises an die beiden ersten Kreise die Tangenten, so verhalten sich die Quadrate dieser Tangenten wie die Abstände des dritten Mittelpunkts von den beiden ersten.

Dieser Satz gilt aber auch für den Fall, dass Punkt M innerhalb eines der beiden Kreise liegt und man statt der Tangente an denselben die halbe kürzeste Sehne in ihm zieht. Ferner gilt er nicht nur für den Fall, dass die Kreise einander schneiden, sondern auch, wenn der dritte Kreis dieselbe Potenzlinie hat wie die zwei ersten, denn die oben für $\varrho^2 - r^2$ und $\varrho^2 - r_1^2$ ermittelten Gleichungen sind nach Anmerkung 29 auch für diesen Fall gültig. Der Satz b) in der Antwort zu Frage 37 folgt aus dem eben ausgesprochenen, denn die Strecken OA und QA verhalten sich wie die Halbmesser r und r_1, wenn A Aehnlichkeitspunkt ist, und der Potenzkreis hat mit jedem der beiden Kreise die Potenzlinie gemeinsam.

Figur 168.



Anmerkung 56. Es sei in Fig. 168: A ein Aehnlichkeitspunkt und der Kreis ff_1 der zugehörige Potenzkreis für die zwei Kreise O und Q; der Halbmesser des Potenz-

kreises sei ϱ. Aus der Gleichung $Aa . Aa_1 = \varrho^2$, welche für irgend zwei potenzhaltende Punkte gilt, folgt, dass bei gegebenem Potenzkreis zu einem gegebenen Punkt a immer ein zweiter bestimmter potenzhaltender Punkt a_1 gehört, welcher mit a auf dem gleichen Aehnlichkeitsstrahl liegt, und dass die Punkte a und a_1 in Bezug auf den Potenzkreis reciproke Punkte sind (siehe die Antwort zu Frage 21). Da nun zwei Kreise, welche den gleichen Potenzkreis haben, von einem Aehnlichkeitsstrahl in zwei Paaren potenzhaltender Punkte getroffen werden, so folgt, dass wenn der eine von zwei potenzhaltenden Punkten den Umfang eines Kreises O durchläuft, der zugehörige potenzhaltende Punkt auf dem Umfang eines zweiten Kreises Q sich bewegt, welcher mit O denselben gleichartigen Potenzkreis hat. Sieht man also den Potenzkreis als gegeben an, so lässt sich zu jedem Kreise O ein und nur ein Kreis Q konstruieren, welcher mit dem gegebenen Kreis O denselben gegebenen Potenzkreis gleichartig (entweder beide als äusseren oder beide als inneren) besitzt.

Anmerkung 57. Haben in Fig. 168 die beiden Kreispaare O, Q und M, N denselben Punkt A als gleichartigen Aehnlichkeitspunkt und in Bezug auf diesen den gleichen und gleichartigen Potenzkreis, so folgt, dass die Punkte a, b, in welchen z. B. O und M einander schneiden, mit den Punkten a_1, b_1, in welchen Q und N einander schneiden, in Bezug auf A potenzhaltend sind, denn der Punkt, welcher zu a potenzhaltend ist, muss nach der Voraussetzung und nach Anmerkung 56 sowohl auf Kreis Q als auf Kreis N liegen, weil a sowohl auf Kreis O als auf Kreis M liegt; ebenso muss der Punkt b_1, welcher zu dem Schnittpunkt b von O und M als potenzhaltender gehört, Schnittpunkt der Kreise Q und N sein. Auf gleiche Weise müssen die Schnittpunktepaare c, d von Kreis Q und M den Schnittpunktepaaren c_1, d_1 von Kreis O und Kreis N entsprechen. Oder mit anderen Worten: Haben zwei Kreispaare einen gleichen und gleichartigen Potenzkreis, so sind ihre Schnittpunkte potenzhaltende Punkte.

Anmerkung 58. Die Schnittsehnen ab und cd müssen einander auf der Potenzlinie RR_1 der Kreise O und Q schneiden als Verbindungsstrecken potenzhaltender Punktepaare, denn sie sind Sehnen desselben Kreises M, ebenso liegt der Schnittpunkt von $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ auf der Potenzlinie RR_1 von O und Q, weil sie Sehnen desselben Kreises sind. Dagegen schneiden ab und $c_1 d_1$, ebenso $a_1 b_1$ und cd einander auf der Potenzlinie ff_1 der Kreise M und N. Nun ist aber nach der Definition der potenzhaltenden Punkte: $Aa . Ab = Aa_1 . Ab_1$, folglich liegen a, b, a_1, b_1 auf einem Kreis und cd und $c_1 d_1$ schneiden einander auf der Potenzlinie RR_1 von O und Q; ebenso ist $Ac . Ac_1 = Ad . Ad_1$, folglich liegen die Punkte c, c_1, d, d_1 auf einem Kreis und cd und $c_1 d_1$ schneiden einander auf RR_1; da aber die Sehnen ab und $a_1 b_1$ einerseits und cd und $c_1 d_1$ andererseits auch dem Kreispaar M und N angehören, so folgt, dass sich sowohl ab und $a_1 b_1$ als cd und $c_1 d_1$ auch auf ff_1 schneiden müssen. Der Schnittpunkt R der beiden Potenzlinien ist somit gemeinsamer Schnittpunkt der Sehnen ab, cd, $a_1 b_1$, c_1, d_1 und man erhält den Satz:

Haben zwei Paare von Kreisen einen gleichen und gleichartigen Potenzkreis, so besitzen sie einen gemeinsamen Potenzpunkt.

Anmerkung 59. Man lege durch die zwei potenzhaltenden Punkte d und d_1 einen beliebigen Kreis P, welcher nach Anmerkung 51 in Bezug auf A potenzhaltend ist. Dann sind die Winkel:

1). . . . . $\sphericalangle\, Pdd_1 = \sphericalangle\, Pd_1 d$.

Zieht man die Halbmesser Od_1 und Qd, welche einander in o schneiden, so ist nach Erkl. 63:

2). . . . . $\sphericalangle\, odd_1 = \sphericalangle\, od_1 d$.

Da aber d und d_1 auch potenzhaltende Punkte der Kreise M und N sind, so

ist, wenn man die Halbmesser Md und Nd_1 zieht, die einander in q schneiden, aus demselben Grunde wie vorhin:

3). . . . . $\sphericalangle\, q d d_1 = \sphericalangle\, q d_1 d.$

Aus diesen drei Gleichungen folgt,
wenn man 1) von 2) subtrahiert:

$$\sphericalangle\, o d \mathrm{P} = \sphericalangle\, o d_1 \mathrm{P},$$

oder durch Subtraktion von 180°:

4). . . . . $\sphericalangle\, \mathrm{Q} d \mathrm{P} = \sphericalangle\, \mathrm{O} d_1 \mathrm{P};$

wenn man 1) und 3) addiert:

$$\sphericalangle\, q d \mathrm{P} = \sphericalangle\, q d_1 \mathrm{P},$$

oder

5). . . . . $\sphericalangle\, \mathrm{M} d \mathrm{P} = \sphericalangle\, \mathrm{N} d_1 \mathrm{P};$

wenn man 5) von 4) subtrahiert:

6). . . . . $\sphericalangle\, \mathrm{Q} d \mathrm{M} = \sphericalangle\, \mathrm{O} d_1 \mathrm{N}.$

Oder mit Worten:

a). Haben verschiedene Paare von Kreisen den gleichen Potenzkreis gleichartig, so werden die Kreise jedes Paars von irgend einem für den gleichen Potenzkreis potenzhaltenden Kreis unter gleichen Winkeln geschnitten.

b). Haben zwei Paare von Kreisen denselben Potenzkreis gleichartig, so ist der Winkel, unter welchem ein Kreis des einen Paars einen Kreis des andern Paars schneidet, gleich dem Winkel, unter welchem die anderen Kreise jedes Paars einander schneiden.

Anmerkung 60. Wenn zwei Kreise einander unter einem Winkel von 180° schneiden, so berühren sie einander, daher folgt aus Anmerkung 59 der weitere Satz als Spezialfall:

Haben zwei Paare von Kreisen den gleichen Potenzkreis gleichartig und zwei derselben, welche nicht ein Paar bilden, berühren einander, so berühren auch die andern beiden Kreise einander (z. B. die Paare M, N und X, Y).

Anmerkung 61. Von Wichtigkeit ist auch die Umkehrung des ersten Satzes von Anmerkung 59, welche lautet:

Schneidet ein Kreis zwei andere unter gleichen Winkeln, so ist er potenzhaltend in Bezug auf einen ihrer Aehnlichkeitspunkte. Denn nach Voraussetzung ist $\mathrm{P}d = \mathrm{P}d_1$, $\sphericalangle\, \mathrm{P}d\mathrm{Q} = \sphericalangle\, \mathrm{P}d_1\mathrm{O}$, also ist das Dreieck $\mathrm{P}dd_1$ gleichschenklig, daher $\sphericalangle\, \mathrm{P}dd_1 = \sphericalangle\, \mathrm{P}d_1 d$, daher auch $\sphericalangle\, \mathrm{Q}dd_1 = \sphericalangle\, \mathrm{Q}d_1 d$, oder $\sphericalangle\, odd_1 = \sphericalangle\, od_1 d$; somit ist o Mittelpunkt eines Kreises, der die Kreise Q und O in d_1 und d berührt, folglich geht $d_1 d$ durch A und die Punkte d_1 und d sind potenzhaltend.

Anmerkung 62. Artet einer der beiden Kreise in eine Gerade aus, so liegt der Aehnlichkeitspunkt nach der Antwort a) zu Frage 29 im Endpunkt des zur Geraden senkrechten Durchmessers. Die Potenz des Endpunktes A (Fig. 168) in Bezug auf die Gerade ist das Quadrat irgend einer von A nach der Geraden gezogenen Strecke. Schneidet also z. B. eine durch A gezogene Gerade den Kreis G in a', die Gerade gg_1, welche mit Kreis G den Kreis A zum Potenzpunkt hat, in a'_1, so ist $\mathrm{A}a' . \mathrm{A}a'_1 = \varrho^2$.

Ebenso ist für einen anderen Kreis H und die zugehörige Gerade hh_1: $\mathrm{A}b'_1 . \mathrm{A}b' = \varrho^2$.

Schneidet die Gerade hh_1 den Potenzkreis in i und i_1, so geht auch der Kreis H durch diese Punkte. Aus Anmerkung 59 folgt, dass, wenn zwei Geraden gg_1 und hh_1 mit zwei Kreisen G und H denselben Punkt A zum Aehnlichkeitspunkt und in Bezug auf ihn dieselbe Potenz haben, der Winkel zwischen den Geraden ($\sphericalangle a'cb'$) gleich dem Winkel ist, unter welchem die Kreise einander schneiden.

Sind insbesondere die Geraden (gg_1 und kk_1) einander parallel, so berühren die zugehörigen Kreise (G und K) einander im Aehnlichkeitspunkt.

Aufgabe 154. Einen Kreis zu zeichnen, für welchen in Verbindung mit einem gegebenen Kreis ein zweiter gegebener Kreis Potenzkreis ist.

Gegeben: Kreis um U, Kreis um A.

Gesucht: Kreis um U_1.

Forderung: Kreis um A soll äusserer Potenzkreis der Kreise um U und U_1 werden.

Erkl. 149. Die zugehörige Figur ist in Fig. 168 enthalten.

Analysis. Liegt Kreis U so, dass er den Potenzkreis schneidet (also wie Kreis V in Fig. 168), so muss auch Kreis V_1 durch die Schnittpunkte l und l_1 gehen. Zieht man Al, so schneidet dieselbe Kreis V zum zweitenmale in l', und die Punkte l' und l sind homologe Punkte der Kreise V und V_1 für den Aehnlichkeitspunkt A; dadurch ist die Richtung von lV_1 bestimmt. Schneidet nun Kreis V den Kreis U in m, so ist der zweite Schnittpunkt n der Am mit Kreis U homolog zum Schnittpunkt n' der Am mit Kreis V_1 und zwar für die Kreise U und U_1, denn m und n' sind nach Anmerkung 51 potenzhaltende Punkte.

Konstruktion. Wenn Kreis U den Potenzkreis A nicht schneidet, zeichne einen beliebigen Kreis V, dessen Mittelpunkt auf AU liegt und welcher den Potenzkreis in l und l_1, den Kreis U in m und m_1 schneidet. Ziehe Al, welche Kreis V zum zweitenmale in l' schneidet, und Am, welche Kreis U zum zweitenmale in n schneidet. Ziehe Vl' und parallel dazu lV_1. Beschreibe um V_1 einen Kreis mit $V_1 l$, welcher Am in n' schneidet.

Ziehe Un und die Parallele dazu durch n', welche AU in U_1 trifft. Beschreibe um U_1 mit $U_1 n$ einen Kreis, dieser ist der gesuchte.

Beweis folgt aus der Analysis.

Anmerkung 63. Ist statt des Kreises U die Gerade kk_1 gegeben, so fälle von A auf kk_1 das Lot Ak, lege von k an den Potenzkreis die Tangente kt, fälle von t auf Ak das Lot tB, und beschreibe über dem Durchmesser AB einen Kreis. so ist dieser der gesuchte. Denn da Atk ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe

tB ist, so ist nach dem Kathetensatz $\overline{At}^2 = AB \cdot Ak$. Die letztere Grösse ist aber die gemeinschaftliche Potenz des Aehnlichkeitspunkts A für die Gerade kk_1 und den Kreis K.

Ist umgekehrt der durch den Aehnlichkeitspunkt A gehende Kreis K gegeben, so errichte auf dem Durchmesser AKB im andern Endpunkt B die Senkrechte, welche den Potenzkreis in t schneidet und lege in t an den Potenzkreis die Tangente, welche AK in k schneidet. Die Senkrechte zu Ak durch k ist die gesuchte Gerade.

Anmerkung 64. Die Aufgabe 154 und die in den vorhergehenden Anmerkungen entwickelten Sätze haben gezeigt, dass bei gegebenem Potenzkreis, wenn dabei noch bekannt ist, ob derselbe ein äusserer oder innerer sein soll, jedem Punkt ausserhalb des Potenzkreises ein bestimmter Punkt innerhalb entspricht, welcher zu dem ersten in Bezug auf den Potenzkreis reciprok ist.

Daher entspricht jeder Figur auf der Innen- oder Aussenseite des Potenzkreises eine zweite auf der Aussen- oder Innenseite. Die Eigenschaften des Potenzkreises bieten somit ein Mittel, um aus einer Figur eine andere abzuleiten. Diese Ableitung nennt man **Transformation nach dem Prinzip der reciproken Radien**; von zwei in der genannten Weise zusammenhängenden Figuren sagt man, die eine sei die Transformation der andern. Den gegebenen Potenzkreis nennt man Transformationskreis, seinen Mittelpunkt Transformationszentrum, das Quadrat seines Halbmessers ist die Transformationspotenz, jede durch das Transformationszentrum gehende Gerade heisst Transformationsstrahl.

Frage 38. Welche Gesetze gelten bei der Transformation nach dem Prinzip der reciproken Radien für Punkte, Geraden und Kreise?

Antwort. a). Bei der Transformation nach dem Prinzip der reciproken Radien entspricht jedem Punkt wieder ein Punkt, welcher mit dem ersten auf einem Transformationsstrahl liegt und zu demselben in Bezug auf den Transformationskreis reciprok ist.

Erkl. 150. Beweis folgt direkt aus der Definition, siehe Anmerkung 64.

b). Die transformierte Figur eines Kreises ist im Allgemeinen wieder ein Kreis; beide Kreise haben ihre Mittelpunkte auf einem Transformationsstrahl, das Transformationszentrum zum Aehnlichkeitspunkt und den Transformationskreis zum Potenzkreis. Schneidet also ein Kreis den Transformationskreis, so geht der transformierte Kreis durch die Schnittpunkte, berührt ein Kreis den Transformationskreis, so berührt ihn auch der andere in demselben Punkt.

Erkl. 151. Zum Beweis siehe Anmerkung 56. Als Beispiele siehe in Fig. 168 die Kreispaare O, Q; M, N; X, Y; U, U_1; V, V_1.

c). Ein Kreis, welcher den Transformationskreis zum Orthogonalkreis hat, transformiert sich in sich selbst.

Erkl. 152. Als Beispiele dienen in Fig. 168 die Kreise: P, Z; zum Beweis siehe Anmerk. 51.

d). Die Transformation einer Geraden ist ein Kreis, der durch das Transformationszentrum geht, sein Mittelpunkt liegt auf der Senkrechten vom Transformationszentrum auf die Gerade und

Erkl. 153. Als Beispiele dienen in Fig. 168: gg_1 und G, kk_1 und K, hh_1 und H. Zum Beweis siehe Anmerkung 62 und 63.

umgekehrt: jeder Kreis, welcher durch das Transformationszentrum geht, transformiert sich in eine Gerade. Dagegen transformiert sich jeder Transformationsstrahl in sich selbst.

Erkl. 154. Da für zwei entsprechende Punkte a und a_1 die Gleichung gilt: $Aa \cdot Aa_1 = \varrho^2$ (siehe die Anmerk. 48, 49, 56), so wird

für $Aa = 0$ der Wert von $Aa_1 = \infty$,
„ $Aa = \infty$ „ „ „ $Aa_1 = 0$,
„ $Aa = \varrho$ „ „ „ $Aa_1 = \varrho$,

womit die Antworten e) und f) bewiesen sind.

e). Dem Transformationszentrum selbst entspricht eine unendlich ferne Gerade.

f). Die Punkte des Transformationskreises entsprechen sich selbst.

Erkl. 155. Beispiele: die Kreispaare O, M und Q, N in Fig. 168.
Beweis siehe Anmerkung 59.

g). Die Transformationen zweier Kreise (oder Geraden) schneiden einander unter demselben Winkel, wie die Kreise (oder Geraden) selbst; die Schnittpunkte entsprechen einander.

Erkl. 156. Beispiele: die Kreispaare M, X und N, Y in Fig. 168.
Beweis siehe Anmerkung 60.

Berühren insbesondere zwei Kreise einander, so berühren auch ihre Transformationen einander in entsprechenden Punkten.

Erkl. 157. Beispiele in Fig. 168: die Kreise P und Z.
Beweis siehe Anmerkung 51.

h). Jeder Kreis, welcher durch einen Punkt und seine Transformation geht, oder welcher einen Kreis und seine Transformation berührt oder rechtwinklig schneidet oder unter gleichen Winkeln schneidet, hat den Transformationskreis zum Orthogonalkreis und transformiert sich daher in sich selbst.

Erkl. 158. Der Beweis von Antwort i) folgt daraus, dass nach Anmerkung 51 der Potenzkreis Orthogonalkreis zu jedem Kreis ist, welcher die zwei gegebenen Kreise gleichwinklig schneidet, denn ein solcher ist nach Anmerkung 61 potenzhaltend; die Transformationen dieser Kreise schneiden aber nach Antwort g) die Transformationen der gegebenen Kreise wieder gleichwinklig, sind also potenzhaltende Kreise des transformierten Systems. Diese potenzhaltenden Kreise haben nach Antwort g) die Transformation des Potenzkreises zum Orthogonalkreis, also ist letzterer Potenzkreis des transformierten Systems.

i). Die Transformation eines Potenzkreises zweier Kreise ist Potenzkreis der Transformationen dieser Kreise.

Erkl. 159. Der Beweis des Satzes k) ergibt sich aus folgendem: Wählt man einen Punkt des Potenzkreises der Kreise O und Q als Transformationszentrum, so geht der Potenzkreis in eine Gerade, nämlich die Potenzlinie der transformierten Kreise über. Nach Satz i) ist diese aber zugleich Potenzkreis der transformierten Kreise. Da nun der Halbmesser dieses Potenzkreises unendlich gross ist, so liegt der Aehnlichkeitspunkt der transformierten Kreise in unendlicher Entfernung, oder die Kreise sind einander gleich.

k). Wählt man das Transformationszentrum auf dem Transformationskreis, so transformiert sich jedes Paar entsprechender Kreise zu einem Paar gleicher Kreise und umgekehrt: Der Ort für alle Punkte, welche, als Transformationszentrum gewählt, ein Paar von Kreisen zu gleichen Kreisen transformieren, ist ein Potenzkreis des Kreispaars.

Erkl. 160. Beweis des Satzes l):

Wenn die zwei Kreise einander nicht schneiden, so gehen alle Kreise, welche dieselben rechtwinklig schneiden, durch zwei feste Punkte (siehe Erkl. 75). Wenn dagegen die gegebenen Kreise einander schneiden, so gehen alle Kreise, welche sie gleichzeitig halbieren oder den einen rechtwinklig schneiden und den andern halbieren, durch zwei feste Punkte (Erkl. 78 u. 84). Wählt man nun einen dieser Punkte als Transformationszentrum, so transformieren sich alle jene Kreise, zu welchen die gegebenen Orthogonalkreise sind, in Geraden, welche durch die Transformation des andern jener beiden Punkte gehen. Die Transformationen der gegebenen Kreise bleiben aber nach Antwort h) Orthogonalkreise dieser Geraden, die letzteren müssen daher Durchmesser der transformierten Kreise sein, und der Schnittpunkt aller der Geraden wird gemeinsamer Mittelpunkt der transformierten Kreise.

l). In der Ebene zweier gegebenen Kreise gibt es zwei Punkte, von welchen als Transformationszentren aus die gegebenen Kreise zu konzentrischen Kreisen transformiert werden.

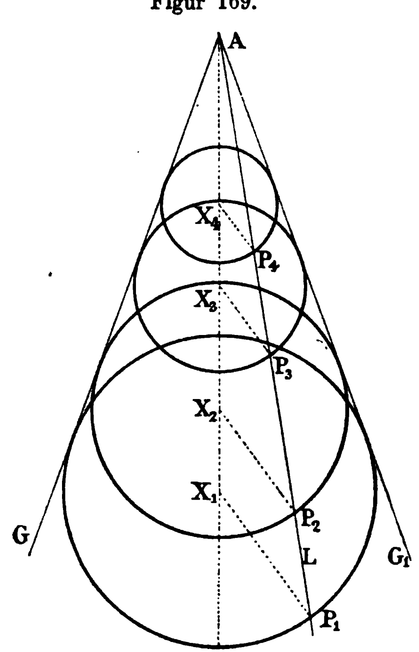
Anmerkung 65. Die Uebertragung mittelst des Prinzips der reciproken Radien eignet sich vorzüglich dazu, um aus einfachen Sätzen über Geraden und Kreise kompliziertere abzuleiten. Folgendes Beispiel zeigt dies:

In Fig. 169 berühren verschiedene Kreise X_1, X_2, X_3, X_4 .... dieselben Geraden G und G_1, d. h. also: die Kreise haben, beliebig zu Paaren verbunden, denselben Aehnlichkeitspunkt A. Zieht man durch diesen (äusseren oder inneren) Aehnlichkeitspunkt einen beliebigen Aehnlichkeitsstrahl L, so sind die Halbmesser X_1P_1, X_2P_2 .... nach den homologen Schnittpunkten sämtlich parallel, also schneidet der Aehnlichkeitsstrahl alle die Kreise unter gleichen Winkeln

$$\sphericalangle AP_1X_1 = \sphericalangle AP_2X_2 = \sphericalangle AP_3X_3 \ldots.$$

Transformiert man nun auf ein beliebiges Zentrum, so werden G, G_1, L zu Kreisen, welche sowohl durch das Transformationszentrum, als durch den dem Punkt A entsprechenden Punkt hindurchgehen. Jeder beliebige Aehnlichkeitsstrahl wird also zu einem durch die Schnittpunkte derjenigen zwei Kreise hindurchgehenden Kreis, in welche G und G_1 sich transformieren. Die Kreise X_1, X_2, X_3 ... werden zu Kreisen, welche die Transformationen von G und G_1 gleichartig berühren. Man erhält daher den Satz:

Figur 169.

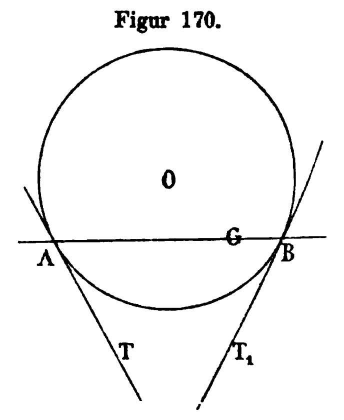


Jeder Kreis, der durch die Schnittpunkte zweier gegebenen Kreise hindurchgeht, schneidet sämtliche Kreise unter gleichen Winkeln, welche die gegebenen gleichartig berühren (also auch die gemeinsamen Tangenten als Berührungskreise von unendlich grossem Halbmesser).

Anmerkung 66. Die Verbindungsgerade G der Berührungspunkte A und B zweier Tangenten AT und BT_1 eines Kreises O bildet bekanntlich mit diesen Tangenten gleiche Winkel TAB und T_1BA.

Transformiert man die Figur 170 auf ein beliebiges Zentrum, so werden G, T, T_1 Kreise, welche durch das Transformationszentrum gehen und man erhält den Satz:

Figur 170.



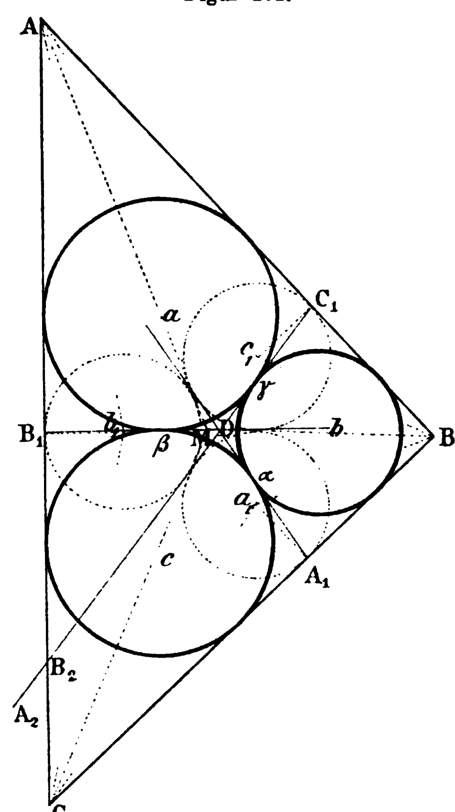
Wird ein Kreis O von zwei anderen Kreisen T und T_1 in A und B berührt, so werden die letzteren von einem Kreise G unter gleichen Winkeln geschnitten, welcher durch die Berührungspunkte und einen Schnittpunkt der Kreise T und T_1 geht.

Da Kreis G mit den Kreisen T und T_1 gleiche Winkel bildet, so schneidet er auch die Tangenten an Kreis O in A und B unter gleichen Winkeln und man kommt zu dem elementaren Satz:

Jeder Kreis, welcher durch die Berührungspunkte zweier Tangenten eines gegebenen Kreises geht, schneidet dieselben unter gleichen Winkeln.

Aufgabe 155. In das Innere eines Dreiecks drei solche Kreise hineinzulegen, dass jeder derselben die beiden andern und zwei Dreieckseiten gleichzeitig berührt.

Figur 171.



Gegeben: Ein Dreieck ABC.

Gesucht: Drei Kreise um a, b, c.

Konstruktion von Steiner.

1). „Man halbiere die Winkel des gegebenen Dreiecks (Fig. 171) durch AM, BM, CM; diese drei Geraden treffen einander bekanntlich (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrbuch der Planimetrie) in einem und demselben Punkte M (dem Mittelpunkt des Inkreises).“

2). „In das Dreieck AMB beschreibe man den Kreis c_1, welcher die Seite AB in dem Punkte C_1 berührt, und in das Dreieck BMC beschreibe man den Kreis a_1“.

3). „Aus dem Punkte C_1 lege man an den Kreis a_1 die Tangente C_1A_2 und beschreibe“

4). „in das Dreieck C_1A_2B den Kreis b, so ist dieser einer der verlangten drei Kreise.“

„Die beiden übrigen gesuchten Kreise a, c werden auf ganz ähnliche Weise gefunden. Nämlich die genannte Tangente $C_1A_2B_2$ berührt nicht allein den Kreis a_1, sondern zugleich auch den in das Dreieck AMC beschriebenen Kreis b_1, so dass

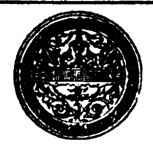
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

900. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 899. — Seite 193—208.
Mit 12 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 899. — Seite 193—208. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

Potenzkreise. — Prinzip der reciproken Radien. — Malfattisches Problem. — Beweis der Steinerschen Auflösung der Malfattischen Aufgabe (nach *Schröter*). — Aufgaben über die Quotienten von Kreisen in Bezug auf eine Gerade.

Stuttgart 1891.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven** Zeichnens etc. etc. und **zwar in vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 161. Die vorliegende Aufgabe wurde von *Malfatti* (geb. 1731 in Ala bei Trient, Professor der Mathematik an der Universität in Ferrara, † 1807 in Ferrara) im Jahre 1803 aufgestellt und durch Rechnung gelöst.

Weitere Auflösungen mit Hilfe von algebraischen und trigonometrischen Rechnungen gaben *Gergonne, Tédenat, Bidone, Lehmus, Crelle, Grunert, Schellbach, Adams* u. a. (siehe *Wittstein*, Geschichte des Malfattischen Problems, 1871).

Die erste rein geometrische Lösung gab *Steiner* im Jahre 1827 (*Crelle*, Journal für Mathem., I. Bd.), jedoch ohne Beweis.

Steiners Konstruktion ist nebenstehend wörtlich enthalten.

Steiner hat die Malfattische Aufgabe noch verallgemeinert und, ebenfalls ohne Beweis, die Lösung der Aufgabe angegeben: „An drei gegebene Kreise drei Berührungskreise zu zeichnen, von denen jeder zwei der gegebenen und zwei der gesuchten Kreise berührt" (siehe Aufgabe 156). *Steiner* bemerkt, dass die von ihm gegebene Auflösung auf den von ihm zuerst entwickelten Sätzen über potenzhaltende Punkte beruhen.

Elementare Beweise der Steinerschen Konstruktion sind von *Binder* (Das Malfattische Problem, Tübingen 1868), *Affolter* (Math. Annalen von *C. Neumann*, Bd. VI), *Andrew S. Hart* (Quarterly Journal of mathematics, vol. I), *Mendthal* (*Hoppes* Archiv der Mathem., Bd. 55) angegeben, jedoch ohne Benützung der von *Steiner* angegebenen Sätze.

Der erste, welcher im Sinne *Steiners* die Aufgabe löste und die Steinersche Konstruktion bewies, war *H. Schröter* (*Borchardt*, Journal für Mathematik, Bd. 77). Dasselbe leistete für die Steinersche Erweiterung des Problems *W. Godt* (*Borchardt*, Journal, Bd. 84).

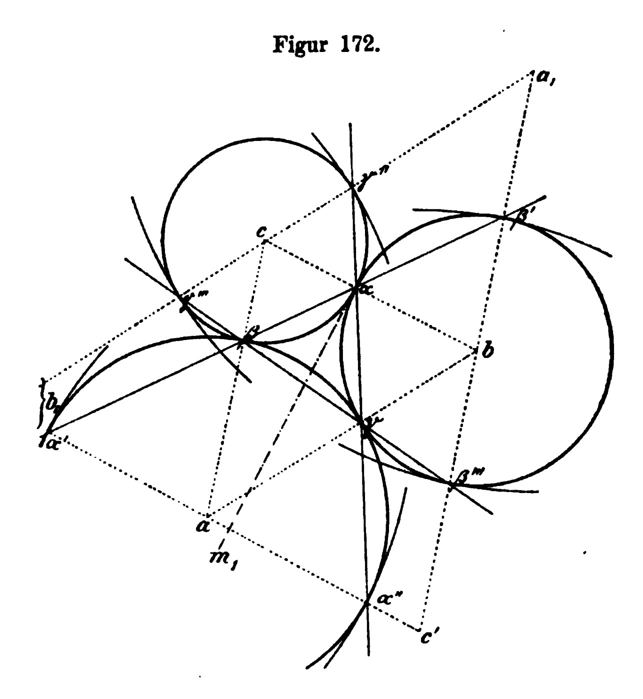
also der in das Dreieck $C_1 B_2 A$ beschriebene Kreis a ebenfalls einer der gesuchten drei Kreise ist. Auf gleiche Weise kann ferner aus dem Punkte B_1, in welchem der Kreis b_1 die Seite AC berührt, eine Gerade gezogen werden, welche nicht allein die beiden Kreise a_1 und c_1, sondern auch die beiden gesuchten Kreise a und c berührt; und ebenso geht eine Gerade durch den Punkt A_1, in welchem der Kreis a_1 die Seite BC berührt, welche jeden der vier Kreise b_1, c_1, b, c berührt."

„Da die beiden Kreise a und b einander berühren, und jeder derselben die Gerade $C_1 A_2 B_2$ berührt, so ist leicht zu sehen, dass sie dieselbe in einem und demselben Punkte berühren. Ebenso berühren die beiden Kreise a und c die durch den Punkt B_1 gehende genannte Gerade in einem und demselben Punkt; und gleichermassen berühren die beiden Kreise b und c die durch den Punkt A_1 gehende genannte Gerade in einem und demselben Punkt. Daher treffen die drei genannten geraden Linien, welche durch die Punkte C_1, B_1, A_1 gehen, in einem und demselben Punkte zusammen."

Beweis. Der Beweis für die obenstehende Konstruktion nach *Schröter* ist in den Anmerkungen 67 bis 72 enthalten.

Anmerkung 67. In Fig. 172 berühren die drei Kreise a, b, c einander von aussen: a und b in γ, a und c in β, b und c in α, die Berührungssehne $\alpha\beta$ schneidet zum zweitenmale Kreis a in α', Kreis b in β; dann sind nach Anmerkung 51 die Punktepaare α, β und α', β' potenzhaltend, α', α und β, β' homolog für den äusseren Aehnlichkeitspunkt von a und b, also $a\beta \parallel b\beta'$, $b\alpha \parallel a\alpha'$ und die Halbmesser $a\alpha'$ und $b\beta'$ schneiden einander im Mittelpunkt c' eines Kreises, der a in α', b in β' berührt. Daher ist das Viereck $a\,c\,b\,c'$ ein Parallelogramm, also $bc' = ac = a\beta + c\beta$, folglich der Halbmesser von c', nämlich $c'\beta' = c'b + b\beta' = a\beta + c\beta + b\alpha$, d. h. gleich der Summe der Halbmesser der drei Kreise a, b, c.

Figur 172.



Ebenso folgt aus der Sehne $\alpha\gamma$, welche Kreis a in α'', Kreis in γ'' schneidet, ein Kreis b', der die Kreise a und c in α'' und γ'' berührt, und aus der Sehne $\beta\gamma$, welche Kreis b in β''', Kreis c in γ''' schneidet, ein Kreis c', der die Kreise b und c in β''' und γ''' berührt. Diese drei Kreise haben gleichen Halbmesser, nämlich die Summe der Halbmesser von a, b, c.

(Da $\sphericalangle\, \gamma'''\beta c = \sphericalangle\, a\beta\gamma$ als Scheitelwinkel, ebenso $\sphericalangle\, \gamma''\alpha c = \sphericalangle\, b\alpha\gamma$, so sind die gleichschenkligen Dreiecke $\gamma'''c\beta$ und $\beta a\gamma$, ebenso $\gamma''c\alpha$ und $\alpha b\gamma$ ähnlich, also

$$\sphericalangle\, \gamma'''c\beta = \sphericalangle\, \beta a\gamma,\ \sphericalangle\, \gamma''c\alpha = \sphericalangle\, \alpha b\gamma,$$

folglich:

$$\sphericalangle\, \gamma'''c\beta + \sphericalangle\, \beta c\alpha + \alpha c\gamma'' = \sphericalangle\, cab + \sphericalangle\, abc + \sphericalangle\, bca = 180^0,$$

daher ist $\gamma''\gamma'''$ Durchmesser von Kreis c, ebenso $\alpha'\alpha''$ Durchmesser von Kreis a, $\beta'\beta'''$ Durchmesser von Kreis b.)

Man erhält so folgenden elementaren Satz:

Wenn sich drei Kreise a, b, c paarweise von aussen berühren, a und b in γ, b und c in α, c und a in β, und man zieht die Sekanten $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, welchen den Kreisen ausserdem in den Punktepaaren $\alpha'\beta'$; $\alpha''\gamma''$; $\beta'''\gamma'''$ begegnen, so gibt es drei neue Kreise a', b', c', welche die gegebenen

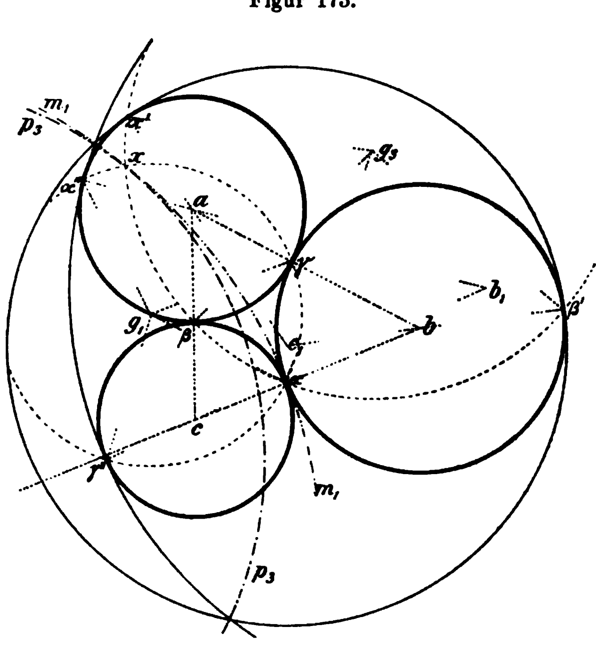
in den drei letzteren Punktepaaren berühren. Diese drei neuen Kreise sind gleich gross und haben zum Radius die Summe der gegebenen Halbmesser.

Anmerkung 68. Den in Anmerkung 67 erhaltenen Satz kann man durch Transformation nach dem Prinzip der reciproken Radien verallgemeinern. Dann gehen die drei gegebenen Kreise wieder in drei einander berührende über, die Sekanten in Kreise, welche durch das Transformationszentrum gehen. Da nun die Kreise a', b', c' gleich gross sind, so ist ihr äusserer Potenzkreis die Potenzlinie. Diese geht wieder in einen durch das Transformationszentrum gehenden Kreis über, welcher äusserer Potenzkreis der transformierten Kreise ist. Man erhält daher:

„Wenn drei Kreise a, b, c einander von aussen berühren, a und b in γ, b und c in α, c und a in β, und man legt durch α und β irgend einen Kreis g_3, der a und b zum zweitenmale in α' und β' trifft, durch α und γ einen Kreis g_2, der a und c ausserdem in α'' und γ'' schneidet, so gibt es allemal einen Kreis c_1, welcher in α' und β' die Kreise a und b gleichartig berührt; es gibt ferner einen Kreis b_1, welcher die Kreise a und c in α'' und γ'' gleichartig berührt; der äussere Potenzkreis p_3 der Kreise b_1 und c_1 geht dann notwendig durch den Schnittpunkt x der beiden durch α, β, α', β' und α, γ, α'', γ'' gelegten Kreise g_2 und g_3.

Dieser Satz lässt sich auch so aussprechen:

Figur 173.

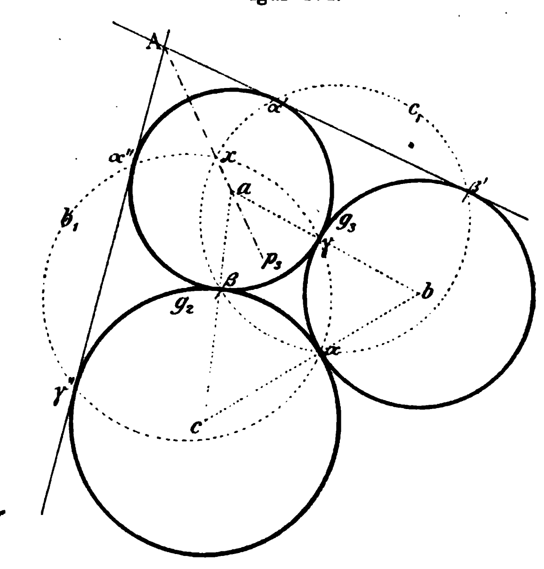


. Wenn drei Kreise a, b, c einander von aussen, a und b in γ, b und c in α, c und a in β, berühren, und man legt irgend einen Kreis c_1 gleichartig berührend in den Punkten α' und β' an a und b, irgend einen Kreis b_1 an a und c gleichartig berührend in α'' und γ'', so liegen sowohl die vier Punkte α, β, α', β' als auch die vier Punkte α, γ, α'', γ'' auf

je in einem Kreise. Diese beiden Kreise haben ausser α noch einen zweiten Schnittpunkt x, welcher auf dem äusseren Potenzkreis von b_1 und c_1 liegt (siehe Fig. 173).

Anmerkung 69. Den in Anmerkung 68 gewonnenen Satz kann man durch neue Transformation so umwandeln, dass die Kreise b_1 und c_1 gerade Linien werden, wenn man nämlich das neue Transformationszentrum in einen Schnittpunkt der Kreise b_1 und c_1 verlegt. Der Potenzkreis von b_1 und c_1, welcher durch die Schnittpunkte von b_1 und c_1 geht (siehe Anmerkung 51), wird dann ebenfalls zu einer Geraden, nämlich nach Antwort b) zu Frage 29 Halbierungsgerade des Winkels zwischen b_1 und c_1. Die transformierten Kreise b_1 und c_1 selbst werden die äusseren gemeinsamen Tangenten an die Kreispaare a, c und a, b. Man erhält daher den Satz (Fig. 174):


Figur 174.

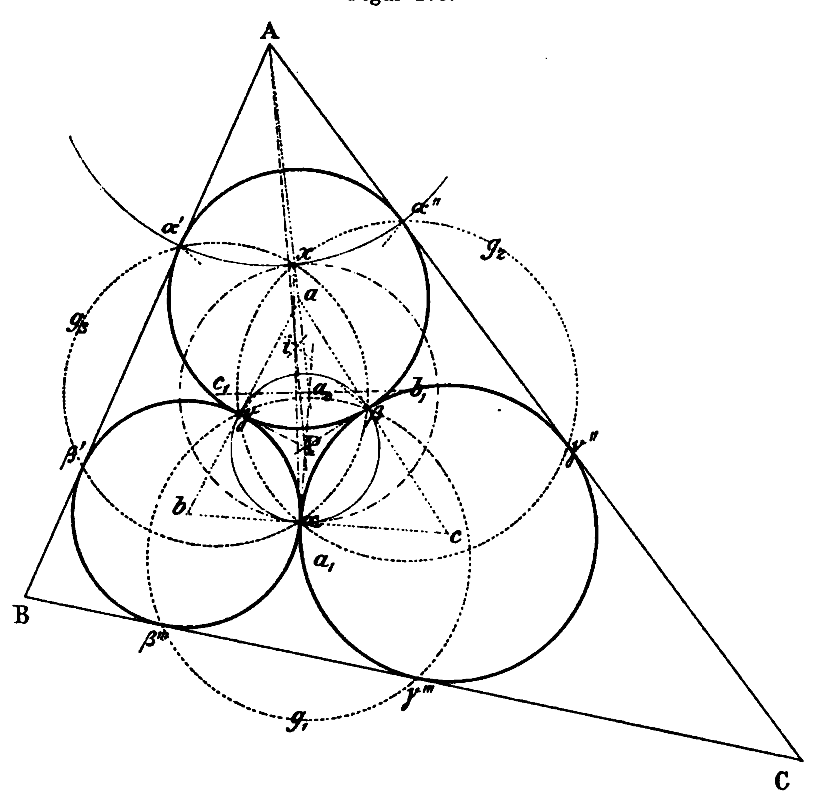


Wenn drei Kreise a, b, c einander paarweise von aussen berühren, a und b in γ, b und c in α, c und a in β, und man zieht an die Kreise a und b eine äussere gemeinsame Tangenté mit den Berührungspunkten α' und β', an a und c eine äussere gemeinsame Tangente mit den Berührungspunkten α'' und γ'', so liegen die vier Punkte α, β, α' β' auf einem Kreise g_3, die vier Punkte α, γ, α'', γ'' auf einem Kreise g_2. Diese beiden Kreise schneiden einander ausser in α noch in einem Punkte x auf der Halbierungsgeraden des Winkels zwischen den gemeinsamen Tangenten.

Anmerkung 70. Die Figur 174 werde noch durch die äussere gemeinsame Tangente $\beta'''\gamma'''$ an die Kreise b und c vervollständigt, und zwar sollen die drei Tangenten so gezogen sein, dass jede alle drei Kreise a, b, c auf einer Seite hat, also letztere in dem von den Tangenten gebildeten Dreieck ABC eingeschlossen sind (siehe Fig. 175). Es werde noch der Kreis g_1 durch die Punkte β, γ, β''', γ''' gelegt. Ferner werde durch die Punkte α, β, γ ein Kreis gelegt. Sein Mittelpunkt P ist Potenzpunkt der drei Kreise a, b, c und Inkreismittelpunkt des Dreiecks abc; denn da die Dreiecke $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$, $c\alpha\beta$ gleichschenklig sind, so sind die Mittellote

von $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, durch welche man den Kreis P findet, Winkelhalbierende des Dreiecks abc, der Kreis P Inkreis des Dreiecks, die Halbmesser $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ stehen senkrecht auf den Seiten des Dreiecks, sind also gemeinsame Tangenten von je zweien der drei Kreise, also hat P gleiche Potenz für jeden Kreis und ist Orthogonalkreis der drei Kreise. Ausserdem werde um A ein Kreis mit dem Halbmesser $A\alpha' = A\alpha''$ beschrieben, so wird derselbe von Kreis a in α' und α'' rechtwinklig geschnitten, da $A\alpha' = A\alpha''$ Tangenten an Kreis a sind.

Figur 175.



Somit schneidet Kreis a die beiden Kreise A und P rechtwinklig und ist daher potenzhaltend für ihren inneren Aehnlichkeitspunkt, und die Punktepaare $\alpha'\beta$ und $\alpha''\gamma$ sind für diesen Punkt potenzhaltende Punkte. Man erhält also den inneren Aehnlichkeitspunkt i der Kreise A und P als Schnittpunkt der Geraden $\alpha'\beta$ mit $\alpha''\gamma$. Diese Geraden sind aber die Schnittsekanten der beiden Kreise g_3 und g_2 mit Kreis a, es muss daher die dritte Schnittsekante $x\alpha$ von Kreis g_2 mit g_3 ebenfalls durch i gehen, weil i der Potenzpunkt für diese Kreise ist.

Die gemeinsame Potenz von i in Bezug auf die drei Kreise ist

$$i\alpha' . i\beta = i\alpha'' . i\gamma = i\alpha . ix.$$

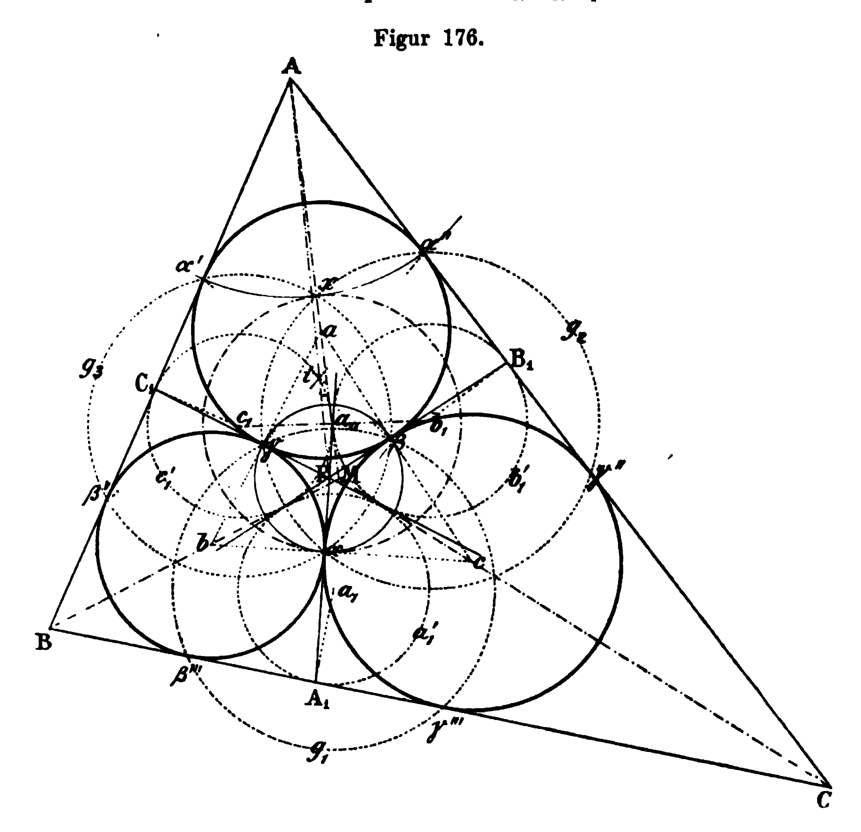
Daraus folgt, dass auch die Punkte α und x potenzhaltende Punkte in Bezug auf i sind, d. h. dass x auf Kreis A liegt, weil α auf Kreis P liegt; Kreis A geht somit durch x.

Aus der Eigenschaft von α und x als potenzhaltender Punkte von A und P für den inneren Aehnlichkeitspunkt folgt, dass sich durch diese Punkte ein Kreis legen lässt, welcher daselbst die Kreise A und P ungleichartig berührt, sein Mittelpunkt a_0 ist der gemeinsame Schnittpunkt der Halbmesser Ax und αP und des Mittellots

von αx, welches zugleich die Zentrale der beiden Kreise g_2 und g_3 ist, die einander in x und α schneiden. Somit bilden die Gerade $a_0 \alpha x$A und a_0Pα gleiche Winkel mit der Zentrale von g_2 und g_3.

Anmerkung 71. Man denke sich (Fig. 176) Kreise beschrieben, welche mit den erstgezeichneten Kreisen g_1, g_2, g_3 konzentrisch sind und die Seiten des Dreiecks ABC berühren, BC in A_1, AC in B_1, AB in C_1. Sie mögen mit a'_1, b'_1, c'_1 bezeichnet werden und ihre Mittelpunkte mit a_1, b_1, c_1.

Figur 176.



Nach Anmerkung 66 schneidet Kreis g_3 die Tangenten $\beta'\alpha'$ und αP des Kreises b, ebenso die Tangenten $\alpha'\beta'$ und βP des Kreises a unter gleichen Winkeln, daher hat c_1 von $\alpha'\beta'$, αP, βP gleichen Abstand, und der konzentrische Kreis c'_1 berührt $\alpha'\beta'$, αP, βP.

Gleichermassen ist zu beweisen, dass Kreis a'_1 die Geraden $\beta'''\gamma'''$, βP, γP und Kreis b'_1 die Geraden $\alpha''\gamma''$, αP, γP berührt.

In Anmerkung 70 wurde aber bewiesen, dass αP und Aa gegen $c_1 b_1$ gleiche Winkel bilden und sich auf ihr schneiden, daher muss Kreis c'_1, wenn er αP berührt, auch die Halbierungsgerade Aa des Winkels A berühren.

Ein Gleiches findet statt mit den Halbierungsgeraden der übrigen Dreieckswinkel, d. h.:

der konzentrische Kreis a'_1 berührt die Halbierungsgeraden der Winkel B und C,
" " " b'_1 " " " " " C " A,
" " " c'_1 " " " " " A " B.

Die drei Halbierungsgeraden schneiden nach einem elementaren Satz (siehe *Kleyer-*

Sachs, Lehrb. der Planimetrie) einander in einem Punkt M, somit sind die konzentrischen Kreise a'_1, b'_1, c'_1 (in der *Steiner*schen Konstruktion mit a_1, b_1, c_1 bezeichnet) die Inkreise der Dreiecke BMC, CMA, AMB.

Anmerkung 72. Da in Anmerkung 71 gezeigt wurde, wie man die Kreise a'_1, b'_1, c'_1 bezw. die Mittelpunkte der Kreise g_1, g_2, g_3 erhält, oder nachdem die Richtigkeit der *Steiner*schen Konstruktion dieser Kreise bewiesen wurde, bleibt noch die Herleitung der Kreise a, b, c aus jenen übrig.

Es sei A_1 der Schnittpunkt von $P\alpha$ mit BC, so müssen die Strecken $A_1\alpha$ und $A_1\beta''$, ebenso $A_1\alpha$ und $A_1\gamma'''$ einander gleich sein als Tangenten derselben Kreise, somit ist A_1 Mitte von $\beta'''\gamma'''$ oder Fusspunkt des Lots von a_1 auf $\beta'''\gamma'''$ (siehe Erkl. 15) oder Berührungspunkt des konzentrischen Kreises a'_1 mit BC.

Ebenso geht $P\beta$ durch den Berührungspunkt B_1 des konzentrischen Kreises um b_1 mit AC, und $P\gamma$ durch den Berührungspunkt C_1 des konzentrischen Kreises um c_1 mit AB.

Daher ist die *Steiner*sche Konstruktion bewiesen.

Sie beruht, wie man sieht, auf dem Satze, dass die gemeinschaftliche Tangente an zwei der gesuchten Kreise in ihrem Berührungspunkt zugleich gemeinschaftliche innere Tangente an zwei der Kreise ist, die sich in die drei durch die Winkelhalbierenden des Dreiecks gebildeten Dreiecke einbeschreiben lassen, und zugleich durch den Berührungspunkt des dritten dieser Kreise mit der zugehörigen Seite geht.

Anmerkung 73. Man kann die *Malfatti*sche Aufgabe mit Hilfe des Prinzips der reciproken Radien verallgemeinern. Transformiert man nämlich Fig. 175 auf ein beliebiges Zentrum, so werden die geraden Linien AB, AC, BC Kreise. Die Halbierungsgeraden der Winkel A, B, C sind als Potenzlinien zwischen diesen Geraden anzusehen, bei der Transformation werden sie daher zu den Potenzkreisen zwischen je zweien der Kreise A, B, C. Diese Potenzkreise schneiden einander in einem Punkte, der Transformation des Punktes M. Da die Kreise a'_1, b'_1, c'_1 in Fig. 176 die Seiten der Dreiecke ABM, ACM, BCM berühren, so muss auch jeder der transformierten Kreise a'_1, b'_1, c'_1 zwei der drei Potenzkreise und einen der Kreise a, b, c berühren, und zwar von letzteren denjenigen, welcher zu beiden berührten Potenzkreisen gehört. Die Geraden $A_1\alpha P$, $B_1\beta P$, $C_1\gamma P$, welche zugleich gemeinsame Tangenten der gesuchten Kreise in ihren Berührungspunkten und innere Tangenten je zweier der Kreise a'_1, b'_1, c'_1 sind, werden zu Kreisen, welche durch die Transformationen der Punkte hindurchgehen, in welchen die gegebenen Kreise von den transformierten Kreisen a'_1, b'_1, c'_1 berührt werden; ferner gehen dieselben durch den Schnittpunkt der drei Potenzkreise (den Potenzpunkt des Systems der Kreise a, b, c), sie berühren je zwei der Kreise a'_1, b'_1, c_1 und zwar ungleichartig und werden von den gesuchten Kreisen berührt.

Daraus ergibt sich folgende, von *Steiner* aufgestellte und gelöste, von *Godt* (1878) zuerst allgemein bewiesene Aufgabe.

Aufgabe 156. (*Steiner*sche Verallgemeinerung der *Malfatti*schen Aufgabe.) „Drei beliebige Kreise sind der Grösse und Lage nach gegeben, man soll drei andere Kreise beschreiben, die einander berühren, und von denen jeder zwei der gegebenen Kreise berührt, jedoch so, dass auch jeder der gegebenen Kreise zwei von den zu suchenden Kreisen berührt."

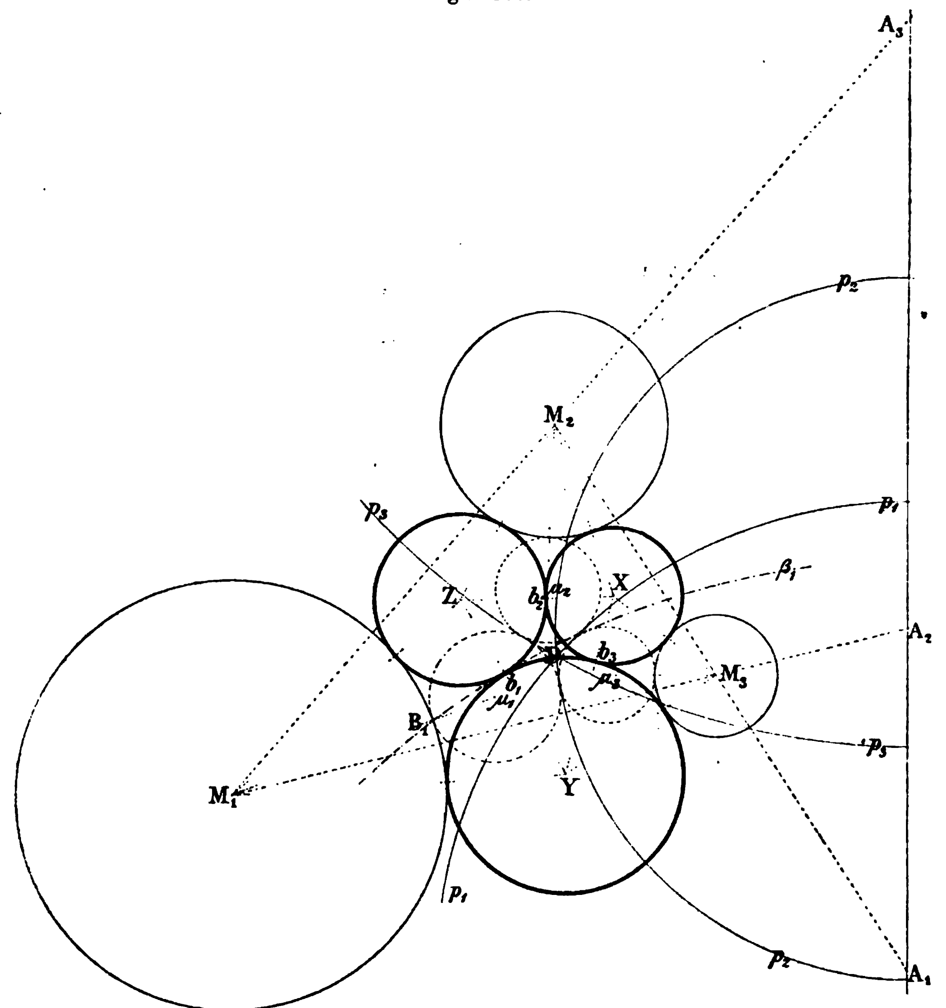
Gegeben: Kreis um M_1, Kreis um M_2, Kreis um M_3.

Gesucht: Kreis um X, Kreis um Y, Kreis um Z.

Forderung: Die Kreise um X, Y, Z sollen einander in den Punkten b_1, b_2, b_3 berühren. Kreis X soll die Kreise M_2 und M_3, Kreis Y die Kreise M_1 und M_3, Kreis Z die Kreise M_1 und M_2 berühren.

Konstruktion. „1). Man suche die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte A_3, A_2, A_1, welche zu den drei gegebenen Kreisen M_1, M_2, M_3 paarweise genommen

Figur 177.



gehören, und konstruiere die zu diesen Aehnlichkeitspunkten gehörigen Potenzkreise A_3, A_2, A_1, welche einander in einem bestimmten Punkt D schneiden werden.“

„2). Hierauf beschreibe man die drei Kreise μ_1, μ_2, μ_3, von denen der erste die drei Kreise M_1, A_2, A_3, der zweite

die drei Kreise M_2, A_3, A_1, der dritte die drei Kreise M_3, A_2, A_1 berührt.

„3). Ferner beschreibe man einen Kreis, dessen Peripherie $B_1 b_1 \beta_1$ durch den Berührungspunkt B_1 der Kreise M_1 und μ_1 geht, und welcher die Kreise μ_2, μ_3 berührt, jedoch so, dass er den Kreis μ_3, welcher von dem kleineren (M_3) der beiden Kreise M_2, M_3 abhängig ist, einschliessend berührt."

„4). So ist endlich derjenige Kreis Y, welchen man so beschreibt, dass er die Kreise M_1, M_3 und den Kreis ($B_1 b_1 \beta_1$) berührt, einer der gesuchten Kreise."

„Die beiden übrigen gesuchten Kreise findet man auf ähnliche Weise. Z. B. der Kreis Z kann aus der vorstehenden Konstruktion unmittelbar gefunden werden, wenn man statt des Kreises Y einen Kreis Z beschreibt, welcher die Kreise M_1, M_2 und den Kreis ($B_1 b_1 \beta_1$) berührt. Es ist zu bemerken, dass die beiden Kreise Y und Z den Hilfskreis ($B_1 b_1 \beta_1$) in einem und demselben Punkte b_1 berühren."

Beweis, siehe Anmerkung 75 bis 78.

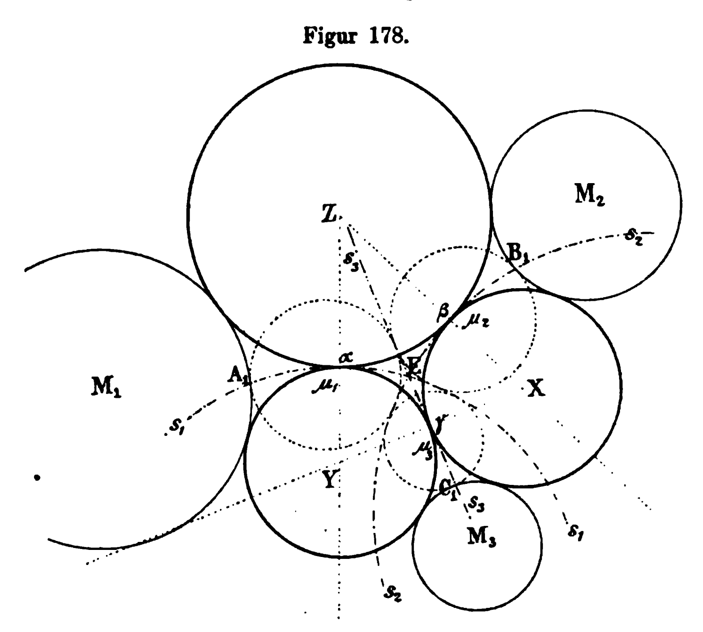
Anmerkung 74. Die in Anmerkung 73 angegebene Transformation der *Malfatti*schen Aufgabe ist kein allgemeiner Beweis für die Aufgabe 156, weil bei der Transformation nach dem Prinzip der reciproken Halbmesser die Transformationen der Seiten des Dreiecks sämtlich durch einen Punkt, das Transformationszentrum, gehen müssen. Sie kann daher als Beweis der Aufgabe 165 nur für den Spezialfall gelten, wo die drei gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 durch einen und denselben Punkt hindurchgehen. Im Folgenden soll der Beweis allgemein geführt werden.

Anmerkung 75. Da in Fig. 172 $b_1 c_1 \parallel bc$ ist, und die Potenzlinie der Kreise b_1, c_1 senkrecht auf $b_1 c_1$, die gemeinsame Tangente αm_1 der Kreise b und c in ihrem Berührungspunkt α senkrecht auf bc steht, so ist αm_1 parallel mit der Potenzlinie. Bei der Transformation der Figur wird aus αm_1 ein Kreis, welcher die Kreise b und c in α berührt und ebenfalls durch das Transformationszentrum geht und (siehe Anmerkung 62) in letzterem den Potenzkreis von b_1 und c_1 berührt (siehe Fig. 173).

Man erhält somit unter Veränderung der Buchstaben den Satz: Berühren drei Kreise X, Y, Z einander paarweise, X und Y in γ, X und Z in β, Y und Z in α und berühren je zwei dieser Kreise noch einen weiteren der drei Kreise M_1, M_2, M_3, X und Y den Kreis M_3 in α''' und β''', X und Z den Kreis M_2 in α'' und γ'', Y und Z den Kreis M_1 in β' und γ', und man legt durch die vier Berührungspunkte α, γ, α'', γ'', in welchen M_2 und Y von X und Z berührt werden, einen Kreis g_2, ebenso durch die vier Berührungspunkte α, β, α''', β''' von M_3 und Z mit X und Y den Kreis g_3, so schneiden die Kreise g_2 und g_3 einander auf dem Potenzkreis von M_2 und M_3, und dieser wird im Schnittpunkt von einem Kreise m_1 berührt, welcher die Kreise Y und Z in ihrem Berührungspunkt α berührt.

Anmerkung 75. Es seien in Fig. 178 M_1, M_2, M_3 die gegebenen, X, Y, Z die gesuchten Kreise, welche einander in den Punkten α, β, γ berühren. Man lege durch α und β zwei beliebige Kreise s_1 und s_2, welche die Kreispaare X, Z und Y, Z in diesen Punkten berühren, und durch γ einen dritten Kreis s_3, der dort das Kreispaar X, Y berührt und durch den Schnittpunkt E von s_1 und s_2 geht, konstruiere ferner die Kreise μ_1, μ_2, μ_3 so, dass μ_1 die Kreise M_1, s_2, s_3; μ_2 die Kreise M_2, s_1, s_3; μ_3 die Kreise M_3, s_1, s_2 berührt, so geht s_1 durch den Berührungspunkt A_1 von M_1 und μ_1, s_2 durch den Berührungspunkt B_1 von M_2 und μ_2, s_3 durch den Berührungspunkt C_1 von M_3 und μ_3.

Figur 178.



Denn transformiert man die Figur vom Zentrum E aus nach reciproken Radien, so werden s_1, s_2, s_3 zu geraden Linien, welche Tangenten der Kreise X, Y, Z in ihren Berührungspunkten, daher Potenzlinien der Kreispaare X, Y; Y, Z; X, Z sind, folglich wird E zum Potenzpunkt. Zugleich werden s_1 und s_2 gemeinsame Tangenten des Kreispaares Z und μ_3, ebenso s_2 und s_3 für das Paar X und μ_1, s_3 und s_1 für das Paar Y und μ_2; somit wird E Aehnlichkeitspunkt für diese Paare. Die Kreise X und Y berühren M_3 und Z, daher geht ihre Potenzlinie, nämlich s_3, durch den Aehnlichkeitspunkt von M_3 und Z, da sie nun schon durch den Aehnlichkeitspunkt E von μ_3 und Z geht, so muss sie auch durch den Aehnlichkeitspunkt von μ_3 und M_3, nämlich durch den Berührungspunkt C_1 gehen, ebenso s_1 durch A_1 und s_2 durch B_1.

Jetzt fehlt noch der Nachweis, dass das System der Kreise s_1, s_2, s_3, von welchen zwei willkürlich sind, so gewählt werden kann, dass die daraus resultierenden Kreise μ_1, μ_2, μ_3 je einen der gegebenen Kreise und zwei Potenzkreise berühren. Hierzu ist noch ein Satz notwendig, der auf der Eigenschaft der potenzhaltenden Kreise beruht.

Anmerkung 76. Alle Kreise, welche drei gegebene gleichartig unter gleichen Winkeln schneiden, haben dieselbe Potenzlinie. Denn jeder Kreis, welcher die beiden ersten der gegebenen drei Kreise gleichartig unter gleichen Winkeln schneidet, ist potenzhaltend in Bezug auf einen Aehnlichkeitspunkt dieser Kreise (siehe Anmerkung 61) und schneidet somit den zugehörigen Potenzkreis rechtwinklig (siehe Anmerkung 51), aus dem gleichen Grunde schneidet

jeder Kreis, der den zweiten und dritten der gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet, einen ihrer Potenzkreise rechtwinklig; da somit die gesuchten Kreise beide Potenzkreise rechtwinklig schneiden müssen, so liegen ihre Mittelpunkte auf der Potenzlinie der beiden Potenzkreise und die Zentrale der letzteren ist die Potenzlinie der gesuchten Kreise (siehe Erkl. 72, 73, 74, 75). Da der erste und zweite, ebenso der zweite und dritte der gegebenen Kreise je zwei Potenzkreise haben und diese zu vier Paaren vereinigt werden können, so zerfallen streng genommen die Kreise, welche drei gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, in vier Systeme, jedem dieser Systeme gehört derjenige Kreis an, welcher die drei gegebenen rechtwinklig schneidet (der Orthogonalkreis derselben), denn dieser schneidet sämtliche Potenzkreise rechtwinklig.

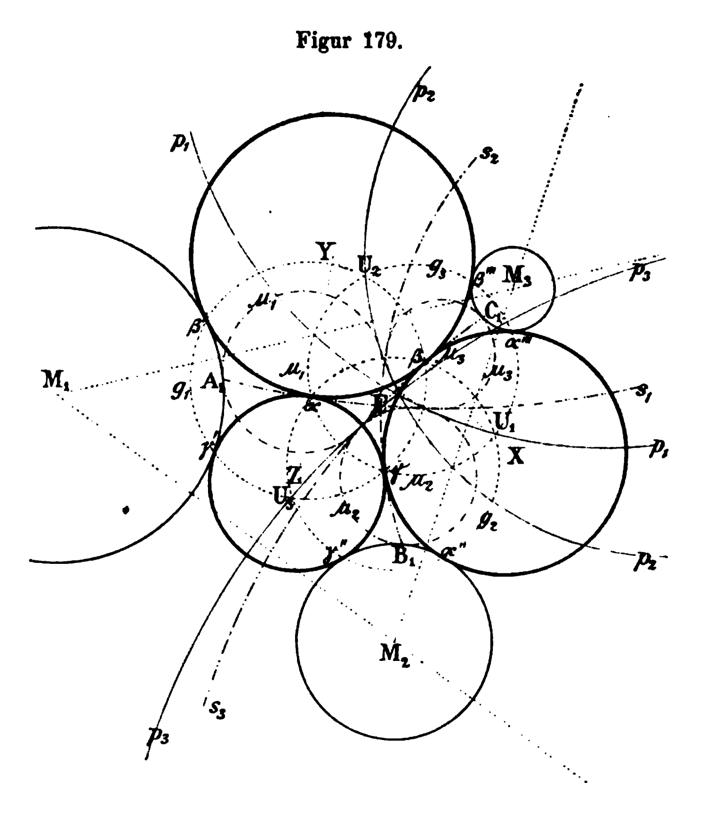
Die Gesamtheit aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen und welche dieselbe Potenzlinie haben, — also wenn zwei davon einander schneiden, alle durch deren Schnittpunkte gehen, oder wenn dies nicht der Fall ist, einander überhaupt nicht schneiden, dagegen von jedem Kreise rechtwinklig geschnitten werden, welcher einen von ihnen rechtwinklig schneidet, — nennt man ein **Büschel von Kreisen.**

Der vollständige Satz würde also lauten:

Alle Kreise, welche drei gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, zerfallen in vier Büschel von Kreisen.

Diese Vierdeutigkeit lässt sich vermeiden, wenn man voraussetzt, dass die gleichen Winkel stets im selben Drehungssinn genommen werden.

Figur 179.



Anmerkung 77. Es seien nun in Fig. 179, wie oben, M_1, M_2, M_3 die gegebenen, X, Y, Z die gesuchten Kreise, zu den gegebenen seien die (äusseren) Potenzkreise p_1 für M_2 und M_3, p_2 für M_1 und M_3, p_3 für M_1 und M_2 gezeichnet, α, β, γ seien

die Berührungspunkte der gesuchten Kreise unter einander, β', γ' die Berührungspunkte von Y und Z auf M_1, α'', γ'' die von X und Z auf M_2, α''', β''' von X und Y auf M_3: durch α, β, α''', β''' sei Kreis g_3, durch α, γ, α'', γ'' Kreis g_2, durch β, γ, β', γ' Kreis g_1 gelegt nach Anmerkung 68, so schneiden g_1 und g_2 einander auf dem Potenzkreis p_3 in U_3, g_2 und g_3 auf p_1 in U_1, g_3 und g_1 auf p_2 in U_2. Nach Anmerkung 74 wird p_1 in U_1 von einem Kreise m_1 berührt, der Y und Z in α berührt, ebenso geht ein Kreis m_2 durch β und U_2, welcher X und Z in β und p_2 in U_2 berührt, und ein Kreis m_3 durch γ und U_3, der X und Y in γ und p_3 in U_3 berührt.

(Die Kreise m_1, m_2, m_3 sind in der Figur der Deutlichkeit wegen weggelassen.)

Das Kreispaar X, M_1 wird von dem Kreispaar Y, Z in β, γ, β', γ' berührt, daher ist der durch diese Punkte gehende Kreis g_1 potenzhaltend für den äusseren Aehnlichkeitspunkt von M_1 und X (siehe Anmerkung 51) und schneidet nach Anmerkung 59 die Kreise M_1 und X unter gleichen Winkeln.

Die Kreise m_2 und m_3 berühren Kreis X in seinen Schnittpunkten β und γ, mit Kreis g_1, daher schneidet nach Anmerkung 66 Kreis g_1 die Kreise m_2 und m_3 unter gleichen Winkeln in U_2 und U_2, da aber dort die Kreise m_2 und m_3 von p_2 und p_3 berührt werden, so schneidet Kreis g_1 die Kreise M_1, X, p_2, p_3 unter gleichen Winkeln, aus dem gleichen Grunde werden M_2, Y, p_1, p_3 von g_2; M_3, Z, p_1, p_2 von g_2 unter gleichen Winkeln geschnitten.

Anmerkung 78. Zu dem Büschel von Kreisen, welche M_1, p_2, p_3 unter gleichen Winkeln schneidet, gehört auch der Orthogonalkreis r der drei gegebenen Kreise, denn jeder Kreis, der zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet, schneidet auch ihren Potenzkreis rechtwinklig (siehe Anmerkung 61 und 51).

Man kann nun von den drei Kreisen s_1, s_2, s_3 der Anmerkung 75, von welchen zwei beliebig gewählt werden dürfen, s_2 und s_3 so annehmen, dass sie den Orthogonalkreis r rechtwinklig schneiden, dann wird letzterer auch von s_1 rechtwinklig geschnitten werden, weil s_1 durch die Schnittpunkte von s_2 und s_3 hindurchgehen muss, also mit denselben zum gleichen Büschel gehört (siehe Anmerkung 75 u. 76).

Ausser dem Kreise M_1 gehört daher jetzt auch Kreis s_2 und s_3 zu denjenigen Kreisen, welche vom Büschel der Kreise g_1 und r unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Da nun Kreis μ_1 (siehe Fig. 178 und Anmerkung 75) die Kreise M_1, s_2, s_3 unter gleichen Winkeln schneidet, nämlich berührt, so gehört er ebenfalls dem Büschel der Kreise g_1 und r an und muss daher auch die Kreise p_2 und p_3 unter den gleichen Winkeln schneiden wie M_1, s_2 und s_3, d. h. berühren. Ebenso muss μ_2 die Kreise M_2, p_1, p_3 berühren, weil er M_2, s_1, s_3 berührt und s_1 und s_3 unter dem gleichen Winkel geschnitten werden wie M_2. Das Gleiche findet in Bezug auf Kreis μ_3 statt, und damit ist die in Aufgabe 165 dargestellte *Steiner*sche Konstruktion bewiesen.

H. Aufgaben über die Quotienten von Kreisen in Bezug auf eine Gerade.

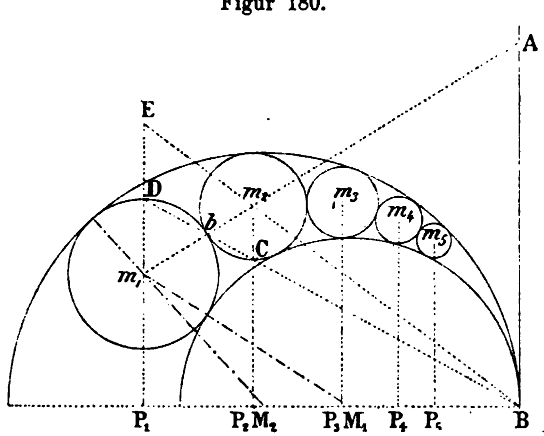
Anmerkung 79. In der gleichen Abhandlung (*Crelle*, Journal für Mathematik, Bd. I), worin *Steiner* die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten und Potenzkreisen auseinander gesetzt und die Auflösung des *Malfatti*schen Problems und seiner Erweiterung gegeben hat, findet sich auch eine Reihe von Sätzen und Aufgaben über das Verhältnis der Quotienten mehrerer Kreise in Bezug auf eine Gerade, welche wegen ihrer Beziehungen zum Kreisberührungsproblem hier zum Teil angeführt werden sollen.

Frage 39. Was versteht man unter dem Quotienten eines Kreises in Bezug auf eine Gerade?

Antwort. Quotient eines Kreises in Bezug auf eine Gerade heisst das Verhältnis vom Abstand des Mittelpunkts von der Geraden zum Halbmesser des Kreises.

Anmerkung 80. In Fig. 180 berühren die zwei gegebenen Kreise M_1 und M_2 einander in B. Es seien irgend zwei Kreise m_1 und m_2 beschrieben, welche beide in gleicher Weise die gegebenen Kreise, sowie einander im Punkt b berühren.

Figur 180.



Daraus folgt, dass der äussere Aehnlichkeitspunkt A der Kreise m_1 und m_2 auf der Potenzlinie von M_1 und M_2 liegen muss. Dies ist aber die gemeinsame Tangente im Punkte B [siehe die Antwort zu Frage 24 und Antwort c) zu Frage 32]. Fällt man von m_1 und m_2 auf die Zentrale M_1M_2 die Lote M_1P_1 und m_2P_2, so ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.), da die Parallelen BA, m_2P_2, m_1P_1 von m_1A und P_1B geschnitten werden:

1). . . . . $BP_2 : BP_1 = Am_2 : Am_1$;

aber da A Aehnlichkeitspunkt ist, so ist:

2). . . . . $Am_2 : Am_1 = r_2 : r_1$,

folglich:

3). . . . . $BP_2 : BP_1 = r_2 : r_1$.

Da jeder der beiden Kreise M_1 und M_2 die Kreise m_1 und m_2 gleichartig berührt so sind sie potenzhaltend in Bezug auf den äusseren Aehnlichkeitspunkt A von m_1 und m_2 (siehe Anmerkung 51), folglich ist das Quadrat der Tangente AB von A an M_1 und M_2 gleich der gemeinschaftlichen Potenz von m_1 und m_2 in Bezug auf A, d. h. $= \overline{Ab}^2$; somit ist $AB = Ab$.

Würde Kreis m_1 von dem Lot m_1P_1 in D (entfernt von M_1M_2), Kreis m_2 von m_2P_2 in C (näher bei M_1M_2) geschnitten, so liegen D, b, c in gerader Linie, weil die Dreiecke m_1Db und m_2bC ähnlich sind. Daher ist das gleichschenklige Dreieck $m_2bC \sim \triangle AbC$, also liegen D, b, C, B in einer Geraden.

Bm_2 möge P_1m_1 in E schneiden, so folgt aus dem vorhin benützten Satze von der Proportionalität der Abschnitte von Geraden zwischen Parallelen mit Rücksicht auf 3):

$$ED : m_2C = BP_1 : BP_2 = r_1 : r_2,$$

oder, da $m_2C = r_2$:

$$ED : r_2 = r_1\, r_2, \text{ d. h. } ED = r_1 \text{ oder } m_1E = 2r_1.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BEP_1 und Bm_2P_2 folgt mit Rücksicht auf 3):

4). . . . . $EP_1 : m_2P_2 = r_1 : r_2;$

aber:

$$EP_1 = m_1P_1 + 2r_1,$$

folglich:

$$m_1P_1 + 2r_1 : m_2P_1 = r_1 : r_2,$$

oder:

5). . . . . $\dfrac{m_1P_1}{r_1} + 2 = \dfrac{m_2P_2}{r_2};$

oder mit Worten:

Werden zwei einander berührende Kreise von jedem von zwei beliebigen einander berührenden Kreisen berührt, so ist der Unterschied der Quotienten der beiden letzten Kreise in Bezug auf die Zentrale der beiden ersten Kreise = 2.

Dieser Satz wird schon von *Pappus* (siehe *Klimpert*, Geschichte der Geometrie) in seinen „collectiones mathematicae" aufgeführt und bewiesen in folgender Fassung:

Das Lot m_1P_1 plus dem Durchmesser von m_1 verhält sich zu diesem Durchmesser wie das Lot m_2P_2 zum Durchmesser von m_2.

Anmerkung 81. Schliessen sich an Kreis m_2 noch weitere Kreise m_3, m_4 .... an, welche alle einander und die gegebenen Kreise berühren, so ist nach dem Satz von Anmerkung 80:

$$\frac{m_2P_2}{r_2} = \frac{m_1P_1}{r_1} + 2,$$

$$\frac{m_3P_3}{r_3} = \frac{m_2P_2}{r_2} + 2 = \frac{m_1P_1}{r_1} + 4,$$

$$\frac{m_4P_4}{r_4} = \frac{m_3P_3}{r_3} + 2 = \frac{m_1P_1}{r_1} + 6,$$

allgemein:

$$\frac{m_xP_x}{r_x} = \frac{m_1P_1}{r_1} + 2(x-1).$$

Oder wenn man zur Abkürzung den Quotienten $\dfrac{m_xP_x}{r_x} = q_x$, das Lot $m_xP_x = p_x$, den Quotienten $\dfrac{m_1P_1}{r_1} = q$, das Lot $m_1P_1 = p$ setzt:

1). . . . . $\frac{p_2}{r_2} = q + 2, \quad \frac{q_3}{r_3} = q + 4 \; \ldots\ldots, \quad \frac{p_x}{r_x} = q + 2(x-1).$

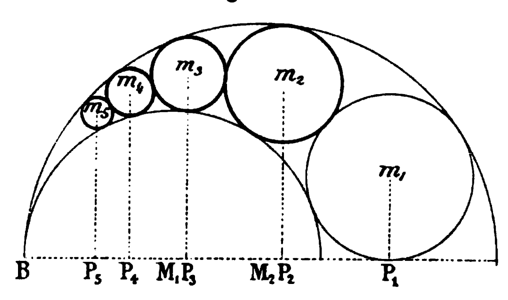
Nimmt man nun an, es sei $p = o$, d. h. der Mittelpunkt von m_1 liege auf der Zentrale $M_1 M_2$, so wird $q = o$, und man erhält (siehe Fig. 181):

Figur 181.

2). . . . . $\frac{p_2}{r_2} = 2, \quad \frac{p_3}{r_3} = 4, \quad \frac{p_4}{r_4} = 6 \; \ldots\ldots, \quad \frac{p_x}{r_x} = 2(x-1).$

Ist aber $q = 1$, d. h. ist $p = r$, oder berührt Kreis m_1 die Zentrale $M_1 M_2$ (siehe Fig. 182), so ist:

Figur 182.



3). . . . . $\frac{p_1}{r_1} = 1, \quad \frac{p_2}{r_2} = 3, \quad \frac{p_3}{r_3} = 5 \; \ldots\ldots, \quad \frac{p_x}{r_x} = 2x-1.$

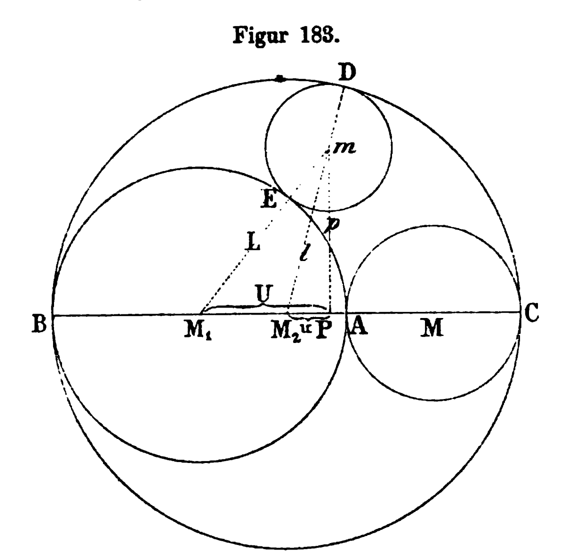
Diese beiden Spezialfälle hat *Pappus* ebenfalls angeführt und jeden für sich bewiesen.

Anmerkung 82. In Fig. 183 werden die gegebenen Kreise M_1 und M_2, die einander in B berühren, von Kreis m berührt, M_1 in E, M_2 in D, die Zentrale $M_1 m$ sei $= L$, $M_2 m = l$, das Lot mP auf die Zentrale $M_1 M_2$ sei $= p$, die Abstände M_1P und M_2P der Mittelpunkte M_1 und M_2 von diesem Lot seien bezw. U und u, die Halbmesser von M_1, M_2, m bezw. R_1, R_2, r und der Quotient $\frac{p}{r}$ des Kreises m in Bezug auf die Zentrale $M_1 M_2$ sei q, so lassen sich die Grössen U, u, L, l in den bekannten Grössen R_1, R_2, q, r einfach ausdrücken, wie *Steiner* in folgender Weise gezeigt hat:

Man denke sich einen weiteren Kreis M gezeichnet, der M_1 und M_2 in gleicher

Weise wie m berührt und dessen Mittelpunkt auf der Zentrale M_1M_2 liegt, sein Radius sei R, dann ist (siehe Fig. 183):

Figur 183.



$$AC = BC - BA, \text{ oder } 2R = 2R_2 - 2R_1, \text{ oder } R = R_2 - R_1,$$

ferner ist $BM = R_2 + R_1$ als Mittel aus den Durchmessern BA und BC.

Nach Anmerkung 80 Gleichung 3) ist $BP : BM = r : R$ oder:

$$BP : R_2 + R_1 = r : R = r : R_2 - R_1,$$

daher:

1). . . . . $$BP = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \cdot r.$$

Ferner ist aus der Figur ersichtlich:

2). . . . . $L = R_1 + r, \quad R_2 = l + r, \quad BP = R_1 + U, \quad BP = R_2 + u.$

Der Pythagoräer gibt im rechtwinkligen Dreieck M_2Pm:

$$l^2 = p^2 + u^2 = p^2 + (BP - R_2)^2 = p^2 + \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \cdot r - (l + r)\right)^2$$

$$= p^2 + \left(\frac{2R_1}{R_2 - R_1} \cdot r - l\right)^2 = p^2 + \frac{4R_1^2}{(R_2 - R_1)^2} \cdot r^2 - \frac{4R_1}{R_2 - R_1} \cdot r \cdot l + l^2.$$

Daher:

$$l = \frac{p^2 + \frac{4R_1^2}{(R_2 - R_1)^2} \cdot r^2}{\frac{4R_1}{R_2 - R_1} \cdot r} = \frac{\frac{p^2}{r^2} + \left(\frac{2R_1}{R_2 - R_1}\right)^2}{2 \cdot \frac{2R_1}{R_2 - R_1}} \cdot r.$$

Setzt man die Grösse $\frac{R_1}{R_2 - R_1} = \pi$, so ist

3). . . . . $$l = \frac{q^2 + 4\pi^2}{4\pi} \cdot r.$$

Ganz ebenso gibt das Dreieck M_1Pm:

4). . . . . $$L = \frac{q^2 + 4(\pi + 1)^2}{4(\pi + 1)} \cdot r.$$

Aus $l^2 = p^2 + u^2$ folgt:

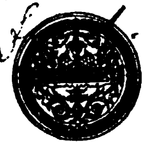
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

908. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Das apollonische Berührungsproblem
nebst verwandten Aufgaben.
Forts. v. Heft 900. — Seite 209—224.
Mit 12 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. v. Heft 900. — Seite 209—224. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über die Quotienten von Kreisen in Bezug auf eine Gerade.

Stuttgart 1891.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten.** Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$u^2 = l^2 - p^2 = (l+p)(l-p) = \left(\frac{q^2+4\pi^2}{4\pi}\cdot r + qr\right)\left(\frac{q^2+4\pi^2}{4\pi}\cdot r - qr\right)$$
$$= \frac{(q^2+4\pi q+4\pi^2)(q^2-4\pi q+4\pi^2)r^2}{16\pi^2},$$

oder:

$$u^2 = \frac{(q+4\pi)^2(q-4\pi)^2}{16\pi^2}\cdot r^2 = \frac{(q^2-4\pi^2)^2}{16\pi^2}\cdot r^2,$$

oder:

5). . . . . $$u = \frac{q^2-4\pi^2}{4\pi}\cdot r,$$

ebenso erhält man aus dem Dreieck M_1Pm:

6). . . . . $$U = \frac{q^2-4(\pi+1)^2}{4(\pi+1)}\cdot r.$$

Setzt man die Werte 3), 4), 5), 6) in 2) ein, so erhält man:

7). . . . . $$R_2 = \frac{q^2+4\pi(\pi+1)}{4\pi}\cdot r,$$

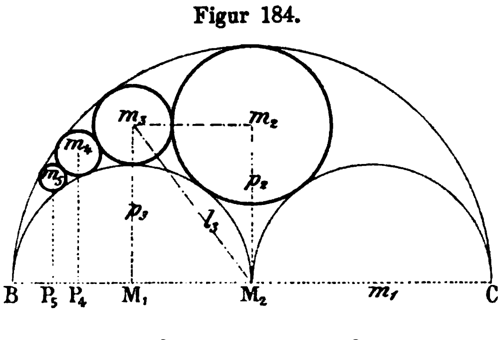
8). . . . . $$R_1 = \frac{q^2+4(\pi+1)(\pi+2)}{4(\pi+1)}\cdot r.$$

Man sieht somit, dass die Ausdrücke, welche sich auf die Kreise M_2 und M_1 beziehen, nur dadurch sich unterscheiden, dass das eine Mal der Wert $\pi = \frac{R_1}{R_2-R_1}$, das andere Mal der Wert $\pi+1 = \frac{R_2}{R_2-R_2}$ gesetzt ist.

Aus den obigen Ausdrücken lassen sich mit Hilfe der Sätze von *Pappus* die zur Konstruktion der Berührungskreise m_1, m_2, m_3 ... nötigen Grössen leicht ableiten.

Anmerkung 83. Ist $\pi = 1$, d. h. $R_1 = R_2 - R_1$ oder $R_2 = 2R_1$ (siehe Fig. 184), so wird:

Figur 184.



$$\frac{l}{r} = \frac{q^2+4}{4},\quad \frac{L}{r} = \frac{q^2+16}{8},$$
$$\frac{u}{r} = \frac{q^2-4}{4},\quad \frac{U}{r} = \frac{q^2-16}{8}.$$

Wendet man diese Ausdrücke auf eine Reihe von Kreisen m_1, m_2, m_3 etc. an, von denen der erste seinen Mittelpunkt auf M_1M_2 hat, so wird nach Anmerkung 81, 2) die Reihe der q: 0, 2, 4, 6 .... $2(n-1)$. Daher wird:

$$\frac{l}{r} = 1,\ \frac{2^2+4}{4} = 2,\ \frac{4^2+4}{4} = 5,\ \frac{6^2+4}{4} = 10,\ \ldots,\ \text{allgemein: } (n-1)^2-1,$$

ebenso:

$$\frac{L}{r} = 2,\ \frac{2^2+16}{8} = \frac{3}{2},\ \frac{4^2+16}{8} = 4,\ \frac{6^2+16}{8} = \frac{13}{2},\ \text{allgemein: } \frac{(n-1)^2+4}{2};$$

$$\frac{u}{r} = -1,\ 0,\ \frac{6^2-4}{4} = 8,\ \ldots,\ \text{allgemein: } (n-1)^2-1;$$

$$\frac{U}{r} = -2,\ -\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{5}{2},\ \ldots,\ \text{allgemein: } \frac{(n-1)^2-4}{2}.$$

Die Zusammenstellung ergibt folgende Tabelle:

Kreise	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	.....	m_n
$\frac{p}{r} = q$	0	2	4	6	8		$2(n-1)$
$\frac{l}{r}$	1	2	5	10	17		$(n-1)^2+1$
$\frac{L}{r}$	2	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{13}{2}$	10		$\frac{(n-1)^2+4}{2}$
$\frac{u}{r}$	-1	0	3	8	15		$(n-1)^2-1$
$\frac{U}{r}$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	6		$\frac{(n-1)^2-4}{2}$

Da $L : r = (R_1+r) : r$, so ist $\frac{R_1}{r} = \frac{L}{r} - 1$, daher:

$$\frac{R_1}{r_1} = 1,\quad \frac{R_1}{r_2} = \frac{3}{2},\quad \frac{R_1}{r_3} = 3,\quad \frac{R_1}{r_4} = \frac{11}{2},$$

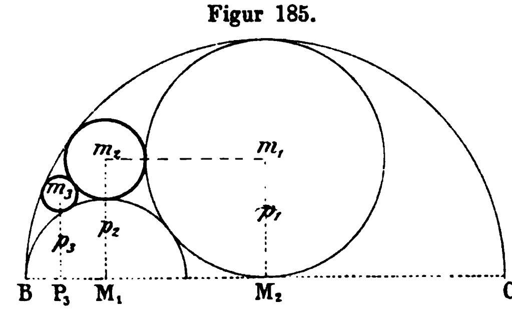
oder: Der Halbmesser von m_1 ist $= R_1$, von $m_2 = \frac{2}{3}R_1$, von $m_3 = \frac{1}{3}R_1 = \frac{1}{2}r_2$, von $m_4 = \frac{2}{11}R_1$ etc. Danach lassen sich die einzelnen Berührungskreise ohne Mühe zeichnen.

Anmerkung 84. Wenn $R_2 = 3R_1$ ist, so wird $\pi = \frac{R_1}{R_2 - R_1} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{l}{r} = \frac{q^2+1}{2},\quad \frac{L}{r} = \frac{q^2+9}{6},$$

$$\frac{u}{r} = \frac{q^2-1}{2},\quad \frac{U}{r} = \frac{q^2-9}{6}.$$

Figur 185.



Verbindet man diesen Fall mit demjenigen, wo Kreis m_1 die Zentrale M_1M_2 berührt (siehe Anmerkung 81, 3), so erhält man folgende Tabelle (siehe Fig. 185):

Kreise	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_n
$p:r = q$	1	3	5	7	9	$2n-1$
$l:r$	1	5	13	25	41	$\frac{(2n-1)^2+1}{2}$
$L:r$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{29}{3}$	$\frac{45}{3}$	$\frac{(2n-1)^2+9}{6}$
$u:r$	0	4	12	24	40	$\frac{(2n-1)^2-1}{2}$
$U:r$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{36}{3}$	$\frac{(2n-1)^2-9}{6}$

Anmerkung 85. Wird der Halbmesser R_2 unendlich gross, d. h. wird Kreis M_2 zur Tangente des Kreises M_1 in B, so ist:

$$\pi = \frac{R_1}{\infty - R_1} = 0,$$

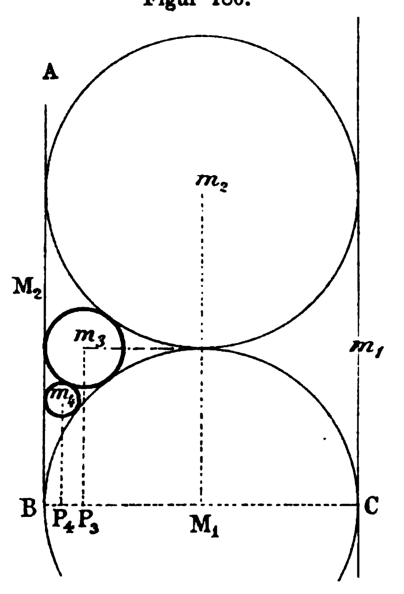
also:

$$\frac{l}{r} = \frac{q^2}{r} = \infty, \quad \frac{L}{r} = \frac{q^2+4}{4},$$

$$\frac{u}{r} = \infty, \quad \frac{U}{r} = \frac{q^2-4}{4},$$

$$\frac{R_2}{r} = \infty, \quad \frac{R_1}{r} = \frac{q^2}{4}.$$

Figur 186.



Wenn nun der erste Kreis m_1 in der Reihe der Berührungskreise seinen Mittelpunkt in der Zentrale M_1M_2 haben, also den Kreis M_1 in C und dann noch die Gerade BA berühren soll, so muss er ebenfalls in eine Gerade ausarten, welche M_1 in C berührt, daher zu BA parallel ist und letztere in unendlicher Entfernung berührt. Die Reihe der q ergibt sich aus Anmerkung 81, 2), daher erhält man (siehe Fig. 186) folgende Tabelle:

Kreise	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_n
$\frac{p}{r} = q$	0	2	4	6	8	$2(n-1)$
$L:r$	1	2	5	10	17	$(n-1)^2+1$
$U:r$	-1	0	3	8	15	$(n-1)^2-1$
$R_1:r$	0	1	4	9	16	$(n-1)^2$

Aufgabe 157. Zwei gegebene Kreise M_1 und M_2 berühren einander und werden von einer Reihe einander berührender Kreise berührt. Man soll den Quotienten eines beliebigen der Berührungskreise in Bezug auf einen Durchmesser des einen der gegebenen Kreise berechnen, wenn der Quotient des andern gegebenen Kreises in Bezug auf diesen Durchmesser bekannt ist.

Gegeben: Kreis um M_1, Kreis um M_2, Kreis um m, m_1, m_2, ..., m_n.

Voraussetzung: Die Kreise M_1 und M_2 berühren einander in B. Die Kreise m_1, m_2 .... berühren sowohl einander von aussen als die Kreise M_1 und M_2. Kreis m berührt Kreis M_2 in A.

Gegeben ferner: Der Quotient Q des Kreises M_1 in Bezug auf $M_2 A$.

Gesucht: Der Quotient eines Kreises der Reihe m in Bezug auf $M_2 A$.

Figur 187.

Auflösung. In Figur 187 sei m_n irgend ein Kreis der Reihe, m der erste, welcher M_2 im Endpunkte A des Durchmessers AM_2C berührt. Es seien auf die Zentrale M_2M_1B die Lote $mP = p$, $m_nP_n = p_n$, auf den Durchmesser AB die Lote $M_1H = h$ und $m_nH_n = h_n$ gefällt, ferner sei $M_2m_n = l_n$ gezogen und die Winkel BM_2A mit α, AM_2m_n mit β, BM_2m_n mit γ bezeichnet.

Setzt man zur Abkürzung noch:

$$\frac{M_1H}{R_1} = \frac{h}{R_1} = Q,$$

und:

$$\frac{R_1}{M_1M_2} = \frac{R_1}{R_2 - R_1} = \pi,$$

so ist (siehe Erkl. 162):

$$1). \ldots \sin\alpha = \frac{M_1H}{M_1M_2} = \frac{h}{R_2 - R_1} = \pi \cdot Q.$$

Ferner ist:

Erkl. 162. Unter dem Sinus (geschrieben sin) eines Winkels versteht man den Quotienten aus dem von irgend einem Punkte des einen Schenkels auf den andern Schenkel gefällten Lote dividiert durch die Entfernung jenes Punktes von der Spitze des Winkels (siehe *Kleyer*, Lehrb. der ebenen Trigonometrie).

$$\sin\beta = \frac{h_n}{M_2 m_n} = \sin(\alpha - \gamma)$$

und

$$\sin\gamma = \frac{m_n P_n}{M_2 m_n};$$

aber (siehe Erkl. 163 und 164):

$$\sin(\alpha-\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\alpha,$$

daher:

$$\frac{h_n}{m_n M_2} = \frac{P_n M_2}{m_n M_2} \cdot \sin\alpha - \frac{m_n P_n}{m_n M_2}\cos\alpha,$$

also:

2). . . $h_n = P_n M_2 . \sin\alpha - m_n P_n \cos\alpha.$

Die Grössen $P_n M_2$ und $m_n P_n$ sind aber in Anmerkung 82, wo sie mit u und p bezeichnet wurden, berechnet worden, nämlich:

$$m_n P_n = p_n = q_n . r_n$$

wenn q_n den Quotienten des Kreises m_n in Bezug auf $M_2 B$ und r_n den Halbmesser von Kreis m_n bedeutet, und:

$$P_n M_2 = u_n = \frac{q_n^2 - 4\pi^2}{4\pi} \cdot r_n$$

(siehe Anmerkung 82, Gleichung 5); daher ist:

3). $h_n = \frac{q_n^2 - 4\pi^2}{4\pi} \cdot r_n \sin\alpha - q_n r_n . \cos\alpha.$

Da nun für den Kreis m das Lot $h = 0$ ist, so hat man für diesen Kreis:

$$0 = \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi} \cdot r . \sin\alpha - q . r . \cos\alpha$$

oder:

4). . . . $\cos\alpha = \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi q}\sin\alpha,$

wo $q = \frac{mP}{r} = \frac{p}{r}$ ist.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung 3), so erhält man:

5). $\frac{h_n}{r_n} = \left(\frac{q_n^2 - 4\pi^2}{4\pi} - q_n \cdot \frac{q^2 - 4\pi^2}{4\pi q}\right)\sin\alpha.$

Nun ist aber nach dem in Anmerkung 81, Gleichung 1) angeführten alten Satze $q_n = q + 2n$, setzt man diesen Wert, sowie den von $\sin\alpha$ aus Gleichung 1) in 5) ein, so erhält man:

Erkl. 163. Unter dem Cosinus eines Winkels (geschrieben cos) versteht man den Quotienten aus der Projektion irgend einer im Scheitel des Winkels beginnenden Strecke des einen Schenkels auf den andern Schenkel, dividiert durch die Strecke (siehe *Kleyer*, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie).

Erkl. 164. Ein bekannter Satz der Goniometrie (siehe *Kleyer*, Lehrbuch der Goniometrie) lautet:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Erkl. 165. Die Umformung des Ausdrucks $\frac{h_n}{r_n}$ für $\frac{h_n}{r_n}$ geschieht so:

$$\frac{(q+2n)^2-4\pi^2}{4\pi}-(q+2n)\frac{q^2-4\pi^2}{4\pi q}$$
$$=\frac{q^2+4nq+4n^2}{4\pi}-\pi-\frac{(q+2n)q}{4\pi}$$
$$+\frac{(q+2n)\pi}{q}=\frac{q^2}{4\pi}+\frac{nq}{\pi}+\frac{n^2}{\pi}-\pi-\frac{q^2}{4\pi}$$
$$-\frac{nq}{2\pi}+\pi+\frac{2n\pi}{q}=\frac{n^2}{\pi}+\frac{2n\pi}{q}+\frac{nq}{2\pi},$$

daher:

$$\frac{h_n}{r_n}=\frac{n^2}{\pi}\cdot\pi Q+\frac{n(4\pi^2+q^2)}{2\pi q}\cdot\pi Q$$
$$=n^2Q+\frac{2n(q^2+4\pi^2)}{4q}\cdot Q.$$

$$\frac{h_n}{r_n}=\left(\frac{(q+2n)^2-4\pi^2}{4\pi}\right.$$
$$\left.-(q+2n)\frac{q^2-4\pi^2}{4\pi q}\right)\pi Q$$
$$=Q\,.\,n^2+Q\cdot\frac{q^2+4\pi^2}{4q}\cdot 2n.$$

Der Ausdruck: $Q\cdot\frac{q^2+4\pi^2}{4q}$ lässt sich jedoch bedeutend vereinfachen:

Nach Anmerkung 82, 3) ist

$$mM_2=l=\frac{q^2+4\pi^2}{4\pi}\cdot r,$$

ferner ist:

$$mP=p=q\,.\,r,$$

folglich ist:

$$\sin\alpha=\frac{mP}{mM_2}\text{ (siehe Erkl. 162)}=\frac{p}{l}$$
$$=qr:\frac{(q^2+4\pi^2)r}{4\pi}=\frac{4\pi q}{q^2+4\pi^2};$$

andererseits ist nach 1) $\sin\alpha=\pi Q$, daher:

$$\sin\alpha=\pi Q=\frac{4\pi q}{q^2+4\pi^2},$$

oder:

$$Q\cdot\frac{q^2+4\pi^2}{4q}=1;$$

setzt man dies im obigen Ausdruck für $\frac{h_n}{r_n}$ ein, so erhält man:

6). . . . . . $\frac{h_n}{r_n}=Qn^2+2n.$

Dies ist die verlangte Beziehung zwischen dem Quotienten von Kreis m_n und dem von Kreis M_1 in Bezug auf die beliebige Axe AC.

Liegt Kreis m_n auf der andern Seite, wie μ_n, so ist n negativ und es ist:

7). . . . . . $\frac{h_n}{r_n}=Qn^2-2n.$

Aufgabe 158. Eine Beziehung zwischen den Quotienten zweier um eine bestimmte Anzahl von Kreisen auseinanderliegender Berührungskreise an zwei gegebene Kreise aufzufinden, die Quotienten auf einen beliebigen Durchmesser eines der beiden Kreise bezogen.

Auflösung. Es sei m_x ein Kreis in der Reihe der Kreise m, m_1, m_2 . . . ., welcher, vom Kreis m_n an gerechnet, der $x-1$te ist, so ist nach Aufgabe 157, Gleichung 6),

Erkl. 166. Die Elimination geschieht so:

$$Qx = Q\,.\,n^2 + 2n(x-1)\,.\,Q + (x-1)^2\,.\,Q$$
$$\qquad\qquad + 2n \qquad + 2(x-1)$$
$$Q_n = Q\,.\,n^2 \qquad\qquad\qquad + 2n.$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$Q_x - Q_n = Q(x-1)^2 + 2(x-1)(nQ+1);$$

aber aus Aufgabe 157 Gleichung 6) folgt:

$$n^2Q^2 + 2nQ + 1 = QQ_n + 1,$$

oder:

$$(nQ+1)^2 = QQ_n + 1,$$

oder:

$$nQ + 1 = \pm\sqrt{QQ_n + 1},$$

dies oben eingesetzt, gibt die nebenstehende Formel.

wenn man zur Abkürzung $\frac{h_n}{r_n} = Q_n$ und $\frac{h_x}{r_x} = Q_x$ setzt:

$$Q_n = Q\,.\,n^2 + 2n$$
$$Q_x = Q\,.\,(n+x-1)^2 + 2(n+x-1)$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse n, so erhält man:

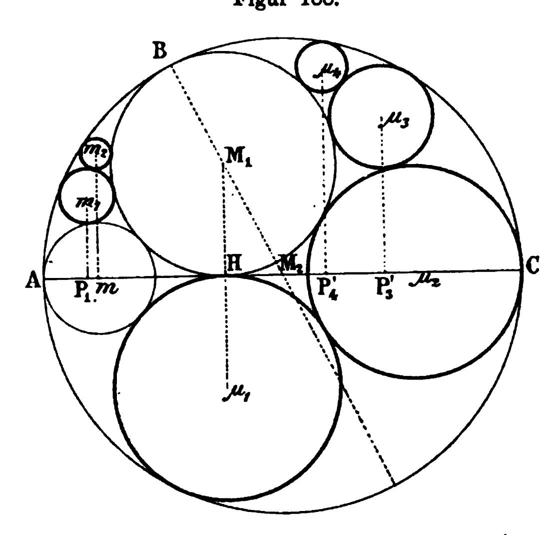
$$1)\ldots\; Q_x = Q(x-1)^2 \pm 2(x-1)\sqrt{1+Q.Q_n} + Q_n.$$

Setzt man in diesen Ausdruck $x = 2$, so ist $x - 1 = 1$ d. h. der Kreis m_x ist der nächste nach m_n, es ist dann:

$$2)\ldots\; Q_{n+1} = Q \pm 2\sqrt{1+Q.Q_n} + Q_n.$$

Anmerkung 86. Setzt man in den Formeln der vorstehenden Aufgaben $Q = 1$, d. h. $h = R_1$, d. h. nimmt man an, dass Kreis M_1 den Durchmesser AC berühre, so erhält man für die Reihe der Kreise μ_3, μ_3, μ_2, μ_1, m, m_1 m_2 . . . ., welche zu beiden Seiten sich an den Kreis m, dessen Mittelpunkt auf AC liegt, berührend anschliessen (siehe Fig. 188):

Figur 188.



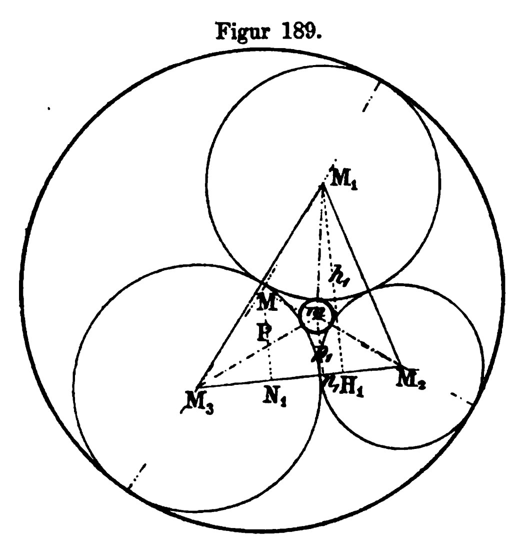
Kreise	μ_n	μ_3	μ_2	μ_1	m	m_1	m_2	m_3	m_n
$\frac{h}{r}$	$n^2 - 2n$	3	0	-1	0	3	8	15	$n^2 + 2n$

Anmerkung 87. Die alten, von *Pappus* mitgeteilten Sätze sind nur spezielle Fälle der in den Auflösungen von Aufgabe 157 und 158 angeführten, man erhält sie, wenn man $Q = 0$ setzt, d. h. wenn M_1 auf AC fällt.

Die vorstehend abgeleiteten Formeln und Sätze gelten nicht nur, wenn die Kreise M_1 und M_2 einander von innen berühren, sondern auch bei äusserer Berührung, und auch dann, wenn der eine beider Kreise in eine Gerade ausartet.

Aufgabe 159. Es seien drei Kreise gegeben, welche einander von aussen berühren, die Halbmesser derjenigen zwei Kreise zu berechnen, welche die gegebenen gleichartig, von aussen und umschliessend, berühren.

Figur 189.



Erkl. 167. Fällt man von einem beliebigen Punkte M auf die Seiten eines Dreiecks ABC die Lote und dividiert jedes Lot durch die zur selben Seite gehörige Höhe, so ist die Summe der drei Quotienten = 1. Dabei ist jedes Lot negativ zu nehmen, das sich auf der andern Seite der zugehörigen Dreiecksseite befindet als das Dreieck selbst.

Beweis. Sind a, b, c die Seiten, J der Inhalt des Dreiecks, so ist nach einem bekannten Satz der Geometrie (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planimetrie):

$$2J = ah_1 = bh_2 = ch_3.$$

Die doppelten Inhalte der Dreiecke MAB, MBC, MCA sind bezw. ap_1, ap_2, ap_3, folglich

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = 2J,$$

also:

$$\frac{ap_1}{ah_1} + \frac{bp_2}{bh_2} + \frac{cp_3}{ch_3} = \frac{2J}{2J}$$

oder

Auflösung. In Fig. 189 seien M_1, M_2, M_3 die drei gegebenen Kreise, M ihr umschliessender, m ihr äusserer Berührungskreis.

Die Halbmesser von M_1, M_2, M_3, M, m seien bezw. R_1, R_2, R_3, R, r.

Man fälle von M_1, M, m auf M_2M_3 die Lote $M_1H_1 = h_1$, $MN_1 = P_1$, $mn_1 = p_1$, dann ist nach dem alten Satze des *Pappus* [siehe Anmerkung 81, 1)]:

$$\frac{p_1}{r} = \frac{h_1}{R_1} + 2,$$

oder:

$$\frac{p_1}{h_1} = \frac{r}{R_1} + \frac{2r}{h_1}.$$

Fällt man die entsprechenden Lote M_1H_2, MN_2, mn_2, M_1H_3, MN_3, mn_3 auf die anderen Seiten M_1M_3 und M_1M_2 des Dreiecks, so erhält man aus dem gleichen Satze:

$$\frac{p_2}{h_2} = \frac{r}{R_2} + \frac{2r}{h_2},$$

$$\frac{p_3}{h_3} = \frac{r}{R_3} + \frac{2r}{h_3}.$$

Die Addition der drei Gleichungen gibt:

$$1)\ldots \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = r\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + 2r\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right).$$

Aber die linke Seite dieser Gleichung ist nach Erkl. 167 = 1; der zweite Teil der rechten Seite lässt sich nach Erkl. 168 durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken; diese sind:

$$a = R_2 + R_3,\; b = R_3 + R_1,\; c = R_1 + R_2.$$

Daher ist:

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = R_1 + R_2 + R_3$$
$$s - a = R_1$$
$$s - b = R_2$$
$$s - c = R_3,$$

folglich ist:

$$\frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}+\frac{p_3}{h_3}=1.$$

Erkl. 168. Ist O der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks und ϱ dessen Halbmesser, so ist nach der vorigen Erklärung:

$$\frac{\varrho}{h_1}+\frac{\varrho}{h_2}+\frac{\varrho}{h_3}=1,$$

oder:

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{\varrho},$$

aber:

$$\varrho a+\varrho b+\varrho c=2J,$$

oder:

$$\varrho(a+b+c)=2J.$$

daher:

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{J},$$

Aber nach der bekannten Heronischen Formel (siehe *Kleyer-Sachs*, Lehrb. d. Planim.) ist:

$$J=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wo $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, also:

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\sqrt{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}}.$$

Daher wird Gleichung 1):

$$2).\;\ldots\;\frac{1}{r}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+2\sqrt{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}}.$$

Für den umschliesenden Kreis M liefert der alte Satz von *Pappus*, da hier Kreis M_1 eine Berührung anderer Art hat als Kreis M:

$$-\frac{P_1}{R}+2=\frac{h_1}{R_1},\quad -\frac{P_2}{R}+2=\frac{h_2}{R_2},$$

$$-\frac{P_3}{R}+2=\frac{h_3}{R_3},$$

oder:

$$-\frac{P_1}{h_1}=\frac{R}{R_1}-\frac{2R}{h_1},$$

$$-\frac{P_2}{h_2}=\frac{R}{P_2}-\frac{2R}{h_2},$$

$$-\frac{P_3}{h_3}=\frac{R}{P_3}-\frac{2R}{h_3}.$$

Durch Adition erhält man:

$$-\left(\frac{P_1}{h_1}+\frac{P_2}{h_2}+\frac{P_3}{h_3}\right)=R\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-2R\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right),$$

oder nach Erkl. 167 und 168:

$$-1=R\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-2R\sqrt{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}},$$

oder:

$$3).\;\ldots\;\frac{1}{R}=-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}+2\sqrt{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}}.$$

Anmerkung 88. Aus den Gleichungen 2) und 3) von Aufgabe 159 folgt:

$$1).\;\ldots\;\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=4\sqrt{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}}=4\sqrt{\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_2R_3}},$$

$$2).\;\ldots\;\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}+\frac{2}{R_3}.$$

$$\frac{1}{rR} = -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^2 + 4\cdot\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3},$$

$$= -\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}\right) - \frac{2}{R_1R_2} - \frac{2}{R_1R_3} - \frac{2}{R_2R_3} + \frac{4}{R_1R_2} + \frac{4}{R_1R_3} + \frac{4}{R_2R_3},$$

oder:

3). . . . . $$\frac{1}{rR} = -\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} + 2\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1R_2R_3}.$$

Anmerkung 89. Wird der Halbmesser R_3 unendlich gross, d. h. geht Kreis M_3 in die gemeinsame Tangente von M_1 und M_2 über, so erhält man für den Halbmesser des Kreises m, welcher dieselben von aussen und die gemeinsame Tangente berührt:

1). . . . . $$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2\sqrt{\frac{1}{R_1R_2}}.$$

Sind alle drei Kreise einander gleich, so wird:

2). . . . . . $$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{3+2\sqrt{3}}{R_1} & \text{oder } r = \frac{2\sqrt{2}-3}{3}R_1, \\ \frac{1}{R} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{R_1} & \text{oder } r = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}R_1, \end{cases}$$

3). . . . . $$rR = \tfrac{1}{8}R_1^2.$$

Wird $R_3 = \infty$ und $R_1 = R_2$, so wird:

4). . . . . $$\frac{1}{r} = \frac{4}{R_1}$$

(siehe in Fig. 186 den Kreis m_3).

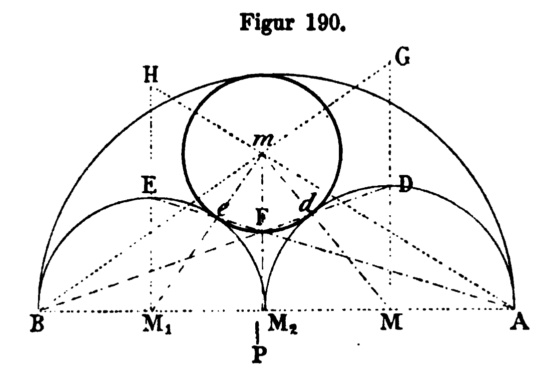
Aufgabe 160. Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei einander berührende Kreise berührt, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen.

Gegeben: Kreis um M, Kreis um M_1, Kreis um M_2.

Voraussetzung: M, M_1, M_2 liegen auf einer Geraden.

Kreis M_2 berührt Kreis M und M_1 umschliessend, die Kreise M und M_1 berühren einander von aussen.

Figur 190.



Konstruktion. A und B seien die Berührungspunkte des Kreises M_2 mit M und M_1.

Errichte auf AB in M das Lot MG gleich dem Durchmesser von Kreis M, in M_1 das Lot M_1H gleich dem Durchmesser von Kreis M_1. Ziehe AH und BG, die einander in m schneiden. m ist des Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

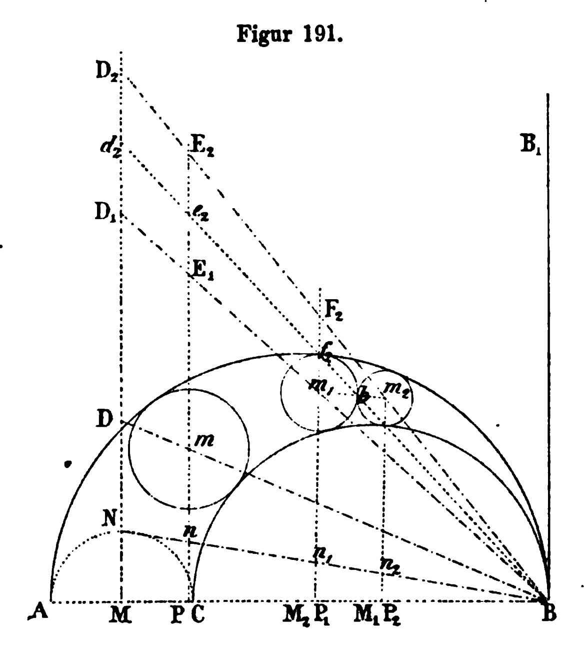
Beweis. Die Parallelen MG und mP werden durch das Strahlenbüschel BG, BD, BM geschnitten, also ist:

$$mF : mP = GD : GM = 1 : 2.$$

Daher berührt nach Anmerkung 80 (vergl. Fig. 180) und Anmerkung 81, 2), wo für Kreis m_2 der Wert $\frac{p}{r} = 2$ gefunden wurde, der Kreis um m mit mF den Kreis M_1. Es ist aber auch mF : MP = HE : HM_1, daher berührt nach Anmerkung 80 der Kreis m auch den Kreis M.

Anmerkung 90. Wenn man Fig. 190 durch einige weitere Berührungskreise vervollständigt, so ergeben sich noch interessante Beziehungen:

Figur 191.



Es seien m, m_1, m_2 drei beliebige Berührungskreise von M_1 und M_2, von welchen m_1 und m_2 einander in b berühren, die Halbmesser von M, m, m_1, m_2 seien R, r, r_1, r_2. Da BB_1 (siehe Fig. 191) als Potenzlinie von M_2 und M_1 durch die Aehnlichkeitspunkte je zweier Paare der Kreise M, m, m_1, m_2 geht, so ist sie Aehnlichkeitsstrahl für dieselben, also verhalten sich die Abstände der Mittelpunkte von ihr, wie die Halbmesser. Fällt man daher die Lote mP, m_1P_1, m_2P_2 so ist

$$1). \quad \ldots \ldots \quad \frac{BM}{R} = \frac{BP}{r} = \frac{BP_1}{r_1} = \frac{BP_2}{r_2}.$$

Zieht man von B die Geraden BmD, B$m_1E_1D_1$, B$m_2F_2E_2D_2$, so ist nach dem Satz von der Proportionalität der Strecken zwischen Parallelen:

$$2). \quad \ldots \ldots \quad \frac{MD_2}{R} = \frac{PE_2}{r} = \frac{P_1F_2}{r_1} = \frac{P_2m_2}{r_2}.$$

Ebenso, wenn N, der Scheitel von Kreis M, mit B durch die Gerade Bn_2n_1nN verbunden wird:

$$3). \quad \ldots \ldots \quad \frac{MN}{R} = \frac{Pn}{r} = \frac{P_1n_1}{r_1} = \frac{P_2n_2}{r_2},$$

aber, da MN = R ist, so ist auch:

4). . . . . $Pn = r$, $P_1 n_1 = r_1$, $P_2 n_2 = r_2$.

Endlich folgt aus dem erwähnten Satze:

5). . . . . $\frac{D_1 D_2}{R} = \frac{E_1 E_2}{r} = \frac{m_1 F_2}{r_1}$.

Nach Anmerkung 80 (siehe Fig. 180) halbiert aber die durch den Berührungspunkt b von Kreis m_1 und m_2 gehende Gerade $B b f_2 e_2 d_2$ die Strecke $m_1 F_2$ in f_2, folglich auch $E_1 E_2$ in e_2, $D_1 D_2$ in d_2, und Punkt f_2 ist der obere Scheitel des Kreises m_1, daher ist:

6). . . . . . $m_1 F_2 = 2 r_1$, $E_1 E_2 = 2r$, $D_1 D_2 = 2R$.

7). . . . $m_1 f_2 = f_2 F_2 = r_1$, $E_1 e_2 = e_2 E_2 = r$, $D_1 d_2 = d_2 D_2 = R$.

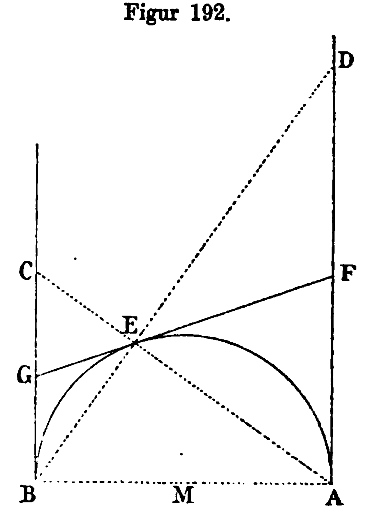
Anmerkung 91. Aus der vorhergehenden Anmerkung ergibt sich ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt eines Berührungskreises zu zwei gegebenen Kreisen, wenn der der Quotient desselben in Bezug auf die Zentrale der gegebenen Kreise bekannt ist:

Macht man nämlich (siehe Fig. 191) $MD_1 = q_1 . R$, wo q_1 den gegebenen Quotienten bedeutet, so ist BD_1 der gesuchte geometrische Ort. Ist aber ein anderer Berührungskreis m gegeben, so mache man $PE_1 = q_1 . r$, dann ist BE_1 der gesuchte geometrische Ort.

Anmerkung 92. Aus Anmerkung 90 folgt ferner: Nimmt man auf dem Lot Pm (siehe Figur 191) durch den Mittelpunkt eines Berührungskreises die Strecke $E_1 E_2 = 2r$ beliebig an und zieht BE_1 und BE_2, so liegen auf diesen Geraden die Mittelpunkte zweier einander berührender Berührungskreise an M_1 und M_2, ihr Berührungspunkt b liegt auf der Geraden, welche B mit der Mitte e_2 von $E_1 E_2$ verbindet.

Anmerkung 93. Für weitere Folgerungen aus den Sätzen von *Pappus* und *Steiner* über die Quotienten von Kreisen sind einige Hilfssätze von *Steiner* von Wichtigkeit.

Figur 192.



a). Es seien (Fig. 192) in den Endpunkten des Durchmessers AB an den Kreis M die Tangenten AD und BC und in einem beliebigen Punkte E die Tangente FG gezogen, welche die Tangente AD in F, die Tangente BC in G trifft. Ferner ziehe man AEC und BED bis zum Schnitt mit den ersten Tangenten, dann ist das Dreieck BEC rechtwinklig (siehe Erkl. 50) und GB = GE (siehe Erkl. 33), daher ist BG = GC. Ebenso ist FE = FD = FA. Man erhält somit den Satz:

Legt man zwei parallele Tangenten an einen Kreis und schneidet dieselben von den Berührungspunkten aus durch Geraden, welche einander in einem beliebigen Punkte des Kreises treffen, so werden die auf den parallelen Tangenten gebildeten Abschnitte durch die in dem Schnittpunkt der beiden Geraden an den Kreis gelegte Tangente halbiert.

b). Nun sind aber die rechtwinkligen Dreiecke ABC und DAB ähnlich, also ist:

1). . . . . AD . BC = AB . AB,

oder mit Worten:

Legt man zwei parallele Tangenten an einen Kreis und schneidet dieselben von den Berührungspunkten aus durch Geraden, welche einander in einem beliebigen Punkt auf dem Kreise treffen, so ist der Durchmesser des Kreises mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Tangenten.

c). Nach dem ersten Satze ist aber $AF = \frac{1}{2}Ad$, $BG = \frac{1}{2}BC$, folglich ist:

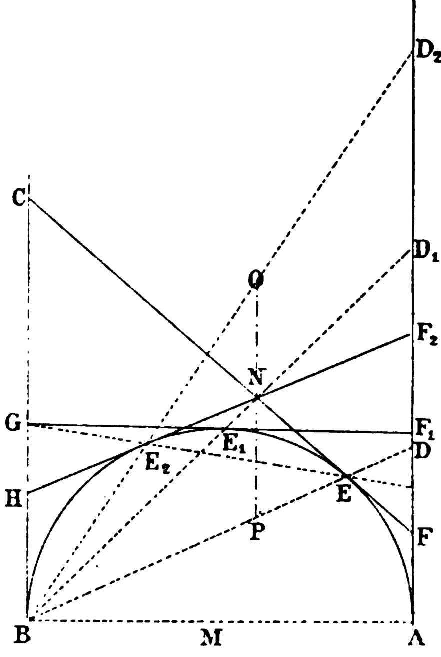
2). . . . . . $AF.BG = FE.EG = \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = R^2$,

oder mit Worten:

Schneidet man zwei paralle Tangenten durch eine dritte Tangente, so ist der Halbmesser des Kreises mittlere Proportionale sowohl zu den Abschnitten auf den parallelen Tangenten, als zu den beiden Abschnitten der dritten Tangente.

d). In Fig. 193 seien an Kreis M wieder die beiden parallelen Tangenten BC und AD gezogen, sowie im Punkte E_1 eine dritte Tangente, welche die beiden ersten in G bezw. F_1 schneidet. Durch G ziehe man in den Kreis die beliebige Sekante GE_2E. BE, BE_1 und BE_2 schneiden AF_1 bezw. in D, D_1, D_2. Die Tangenten des Kreises in E und E_2 schneiden BC und AD in den Punkten C und H bezw. F und F_2 und einander in N. Dann ist nach Antwort zu Frage 23 N Pol zu EE_2 und G Pol zu BE_1. Da nun G auf EE_2 liegt, so geht BE_1 durch N (siehe Antwort zu Frage 23). Durch N ziehe man die Parallele zu BC und AD, welche BE_2 in O, BE in P trifft.

Figur 193.



Nun ist:

$\triangle BHE_2 \sim ONE_2$ und
$BH = HE_2$ (Erkl. 33),

folglich:

$NE_2 = NO = NE$;

da ferner:

$\triangle BCE \sim PNE$ und
$BC = CE$ (Erkl. 33),

so ist:

$NE = NP$, also auch $NO = NP$.

Daher ist nach dem Satze von der Proportionalität der Strecken zwischen Parallelen auch

3). . . . . $DD_1 = D_1D_2$.

Nach Satz a) ist aber $AF = FD$, $AF_1 = F_1D_1$, $AF_2 = F_2D_2$, also:

4). . . . . $FF_1 = F_1F_2$,

aus 3) und 4) ergibt sich:

5). . . . . $2AD_1 = AD + AD_2$,

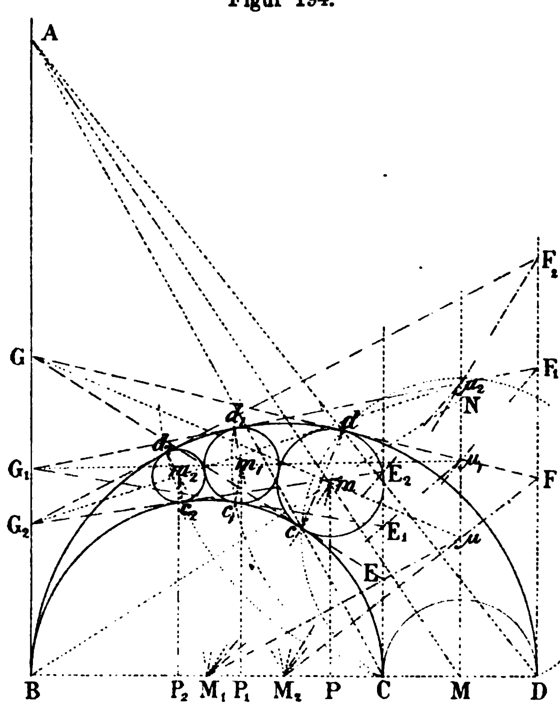
6). . . . . $2AF_1 = AF + AF_2$,

oder mit Worten:

Legt man zwei parallele Tangenten BC, AD an einen gegebenen Kreis M, nimmt in der ersten einen beliebigen Punkt G an, legt aus demselben die Tangente GE_1F_1, welche den Kreis in E_1 berührt, und zieht aus dem gleichen Punkt G eine beliebige Sekante, welche den Kreis in den Punkten E_2 und E schneidet; zieht man ferner aus dem Berührungspunkt B die Geraden BED, BE_1D_1, BE_2D_2, welche die Tangente AD in den Punkten D, D_1, D_2 schneiden: so befindet sich immer der Punkt D_1 in der Mitte zwischen den Punkten D und D_2, was auch die Lage der Sekante sein mag. Und legt man in den Punkten E, E_2 die Tangenten EF, E_2F_2 an den Kreis: so liegt ebenfalls F_1 stets in der Mitte zwischen F und F_2, welche Lage auch die Sekante haben mag. Daraus folgt, dass sowohl die Summe der Abschnitte AD und AD_2, als auch die Summe der Abschnitte AF und AF_2 konstant ist, was auch die Lage der Sekante von G aus sein mag.

Anmerkung 94. In Figur 194 seien wieder zwei Kreise M_1 und M_2 gegeben, die einander in B berühren. Ein beliebiger Kreis *m* berühre Kreis M_1 in *c*, Kreis M_2 in *d*, und der Kreis M, dessen Mittelpunkt auf M_1M_2 liegt, berühre sie in C und D.

Figur 194.



Nach einem schon öfters benützten Satze [siehe Antwort c) zu Frage 32] liegt der Aehnlichkeitspunkt A von Kreis M und Kreis *m* auf der Potenzlinie der Kreise M_1 und M_2, welche ihre gemeinsame Tangente in B ist (siehe Antwort zu Frage 24). Die Punktepaare C und *c*, ebenso D und *d* sind Paare potenzhaltender Punkte (siehe Anmerk. 51) des Aehnlichkeitspunktes A, als Berührungspunkte der Kreise M und *m* mit dem Kreis M_1 bezw. M_2 [siehe Antwort a) zu Frage 32]. Daher schneiden C*c* und D*d* einander in A auf der gemeinsamen Tangente BA der Kreise M_1 und M_2 (siehe Frage 24). Denkt man sich an Kreis M_2

in d die Tangente gelegt, welche BA in G trifft, so ist nach Anmerkung 93 a) BG = GA. Nach dem gleichen Satze geht die Tangente des Kreises M_1 in c durch die Mitte von BA d. h. durch G. Da die Punktepaare C, c, D, d potenzhaltend in Bezug auf A sind, lässt sich durch sie ein Kreis μ legen, dessen Mittelpunkt auf dem Lot der Zentrale $M_1 M_2$ in M liegt.

Da Gc und Gd Tangenten an Kreis m sind, so ist die Zentrale Gm Mittellot von cd (siehe Erkl. 42), aber cd ist auch Sehne in Kreis μ, folglich geht Gm als Mittellot von cd auch durch μ (siehe Erkl. 15); die Punkte G, m, μ liegen daher in gerader Linie.

Zieht man Bm, welche Mμ in N trifft, so sind die Dreiecke BmG und N$m\mu$ ähnlich, ebenso AmG und M$m\mu$, daher ist, weil BG = AG ist, auch:

1). . . . . $M\mu = \mu N.$

Fällt man $mP \perp M_1 M_2$ und bezeichnet die Halbmesser von M und m mit R und r, so ist nach Anmerkung 90, 2):

2). . . . . $\frac{NM}{R} = \frac{mP}{r} = q,$

daher $NM = q.r$, folglich:

3). . . . . $M\mu = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} q.R.$

Wird die gemeinsame Tangente der Kreise M_2 und M von der Tangente Gd in F und die gemeinsame Tangente der Kreise M_1 und M von der Tangente Gc in E geschnitten, so ist nach Erkl. 42 FM_2 Mittellot von Dd und EM_1 Mittellot von Cc, aber Dd und Cc sind Sehnen im Kreis μ, also müssen ihre Mittellote nach Erkl. 15 durch μ gehen, oder die Punkte M_1, E, μ, ebenso die Punkte M_2, μ, F liegen je in einer Geraden.

Anmerkung 95. Denkt man sich in Figur 194 noch einen weiteren Berührungskreis m_1 gezeichnet, welcher die Kreise M_1 und M_2 in c_1 bezw. d_1, sowie den Kreis m berührt, und zeichnet den zugehörigen Kreis μ_1, der durch C, D, c_1, d_1 geht, so ist nach Anmerkung 94, 3):

$$M\mu = \tfrac{1}{2} q.R; \quad M\mu_1 = \tfrac{1}{2} q_1 \cdot R;$$

aber nach dem alten Satz von *Pappus* (Anmerkung 81, 1) ist $q_1 = q + 2$, daher:

$$M\mu_1 = \tfrac{1}{2}(q+2)R$$

oder:

1). . . . . $M\mu_1 - M\mu = \mu\mu_1 = R.$

Was von Kreis m und μ in Anmerkung 94 bewiesen wurde, gilt auch für m_1 und μ_1: die Tangenten von M_1 und m_1 in c_1, von M_2 und m_1 in d_1 schneiden einander auf AB in G_1, die Punkte G_1, m_1, μ_1 liegen in einer Geraden, ebenso die Punkte M_1, E_1, μ_1 und M_2, F_1, μ_1. Das Gleiche gilt für einen weiteren Kreis m_2, der sich an m_1 anschliesst. Daher ist nach 1):

$$\mu\mu_1 = \mu_1\mu_2 = R,$$

also, vermöge des Satzes von der Proportionalität von Strecken zwischen Parallelen:

2). . . . . . . $EE_1 = E_1E_2$ und $FF_1 = FF_2,$

Ferner ist:

$$M_2M : M_2D = \mu\mu_1 : FF_1,$$

aber:

$$M_2M = M_1; \; C = R_1; \; M_2D = R_2; \; \mu\mu_1 = R = R_2 - R_1,$$

also:

$$R_1 : R_2 = R_2 - R_1 : FF_1,$$

also:

3). . . . . $FF_1 = \frac{R_2}{R_1} (R_1 - R_1)$;

ebenso findet man:

4). . . . . $EE_1 = \frac{R_1}{R_2} (R_2 - R_1)$.

Da $M_2 \mu F$ und $M_2 \mu_1 F_1$ gerade Linien sind, so folgt:

$$DF : DF_1 = M\mu : M\mu_1 ;$$

aber nach Anmerkung 94, 3) ist:

$$M\mu = \tfrac{1}{2} q . MD, \quad M\mu_1 = \tfrac{1}{2} q_1 . MD,$$

daher:

5). . . . . $\frac{DF}{DF_1} = \frac{q}{q_1}$.

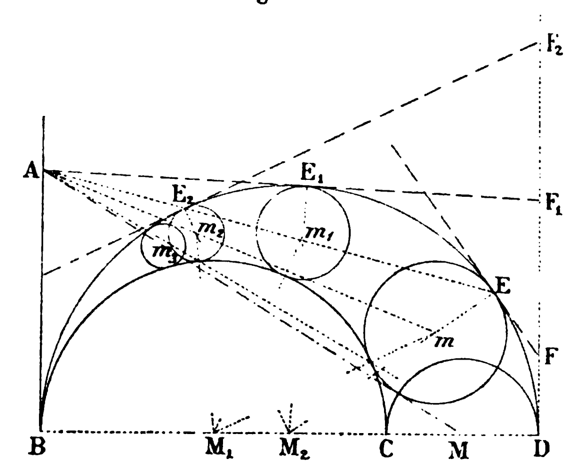
Anmerkung 96. In Figur 195 seien die beiden Berührungskreise m und m_2 beliebig. A ihr Aehnlichkeitspunkt, welcher auf der Tangente beider Kreise in B liegt. Man denke sich die Tangente AE_1 an Kreis M_1 gezogen, welche die in Kreis M_2 in D gezogene Tangente in F_1 schneidet, und denke sich den Berührungskreis m_1 konstruiert, für welchen E_1 der Berührungspunkt mit M_1 ist. Die Quotienten der Kreise m, m_1, m_2 in Bezug auf M_1 und M_2 seien bezw. q, q_1, q_2, dann ist nach Anmerkung 95, 5):

$$\frac{DF}{DF_1} = \frac{q}{q_1}, \quad \frac{DF_2}{DF_1} = \frac{q_2}{q_1},$$

daher:

$$\frac{DF + DF_2}{DF_1} = \frac{q + q_2}{q_1}.$$

Figur 195.



Nach Anmerkung 93, b) ist aber (der Buchstabe A von Figur 193 ist jetzt mit D zu vertauschen):

$$DF + DF_2 = 2DF_1,$$

folglich ist:

1). . . . . $q + q_2 = 2q_1$,

oder mit Worten:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich**, **ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen**, **das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium**, **das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ **Das vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

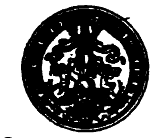
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

909. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Das apollonische Berührungs-problem nebst verwandten Aufgaben. Forts. v. Heft 908. — Seite 225—232 u. I—XI. Mit 5 Fig. (Schlussheft.)



Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Straßen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Das apollonische Berührungsproblem

nebst verwandten Aufgaben.

Zweite Auflage.

Nach System Kleyer bearbeitet von Professor **Heinr. Cranz.**

Forts. von Heft 908. — Seite 225—232 u. I—XI. Mit 5 Figuren.

(Schlussheft.)

Inhalt:

Aufgaben über die Quotienten von Kreisen in Bezug auf eine Gerade. — Titelblätter. — Vorwort. — Inhaltsverzeichnis.

Stuttgart 1891.

Verlag von Julius Maier.

Nimmt man auf der Potenzlinie BA zweier einander in B berührenden Kreise einen beliebigen Punkt A an, legt durch A eine beliebige Gerade und beschreibt diejenigen beiden Kreise, deren Mittelpunkte in dieser Geraden liegen, und welche die gegebenen Kreise berühren, so ist die Summe der Quotienten jener beiden Kreise in Bezug auf die Zentrale der gegebenen Kreise konstant, was auch die Lage der durch A gehenden Geraden sein mag.

Die genannte Quotientensumme ist gleich dem doppelten Quotienten desjenigen Kreises, welcher die gegebenen in den Berührungspunkten der von A an sie gelegten Tangenten berührt.

Legt man die beliebige Gerade durch M, den Mittelpunkt von CD, so ist der eine der beiden zugehörigen Kreise der Kreis M, also ist dessen Quotient = 0, sei der des andern zugehörigen Kreises $n_3 = q_3$, so ist $2q_1 = 0 + q_3$ oder $q_3 = 2q_1$.

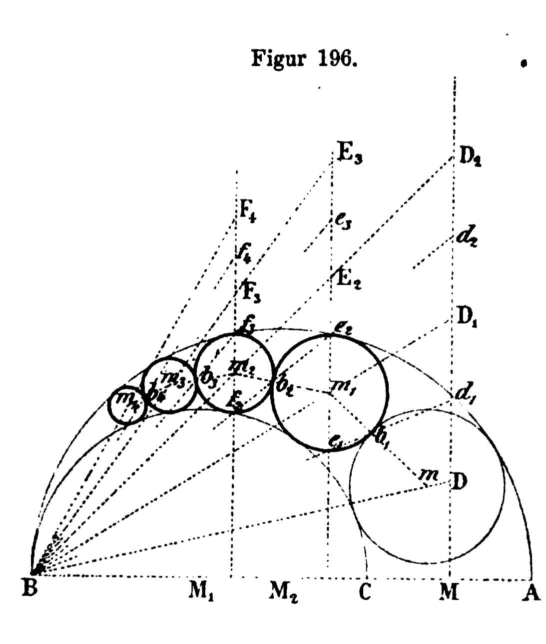
Aufgabe 161. Eine Reihe von Kreisen zu zeichnen, welche einander der Ordnung nach berühren, und von denen jeder zwei gegebene Kreise berührt, wenn die letzteren selbst einander berühren.

Gegeben: Kreis um M_1, Kreis um M_2.

Voraussetzung: Die Kreise um M_1 und M_2 berühren einander in B.

Gesucht: Kreise um m, m_1, m_2 u. s. f.

Figur 196.



Konstruktion I. Die Zentrale M_2M_1B schneide Kreis M_2 in A, Kreis M_1 in C. Halbiere CD in M, errichte auf M_2M_1 in M die Senkrechte, mache auf ihr von einem beliebigen Punkte D aus die Strecken $Dd_1 = d_1D_1 = D_1d_2 = d_2D_2$ u. s. w., je = MC = MA.

Ziehe BD, BD_1, BD_2, BD_3 u. s. w., so müssen auf diesen Geraden die Mittelpunkte m, m_1, m_2, m_3 u. s. w. liegen (siehe Anmerkung 91). Ist nun der erste Kreis m gefunden oder sonst gegeben, so giebt Bd_1 den Berührungspunkt b_1 zwischen Kreis m und m_1, also schneidet mb_1 die BD_1 in m_1. Ebenso giebt Bd_2 auf m_1 den Berührungspunkt b_2 mit m_2, und m_1b_2 schneidet BD_2 in m_2 u. s. w. Für weitere Kreise liegen die Punkte D und d in grosser Entfernung. Fälle deshalb von einem der späteren Mittelpunkte, z. B. m_2 auf die Zentrale das Lot m_2P_2, welches den Kreis m_2 in seinen Schnittpunkten f_2 und f_3 mit Bd_2 und Bd_3 schneidet. Mache auf diesem Lot:

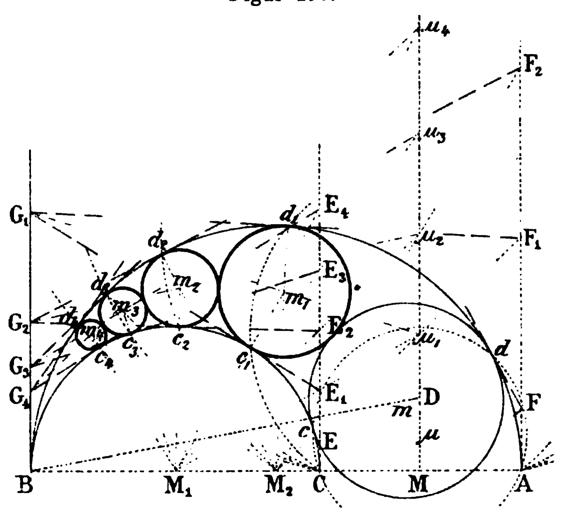
$$m_2F_3 = F_3F_4 = F_4F_5 \ldots . = f_3f_4 = f_4f_5 = \ldots . = f_2f_3$$

und verfahre mit den Punkten F und f wie vorhin mit den Punkten D und d.

Der **Beweis** ergibt sich aus Anmerkung 90, 91, 92.

Konstruktion II. Errichte in der Mitte von AC, in M, die Senkrechte, ebenso in A, B und C. Ziehe, wenn der erste der Kreise, *m*, gegeben ist, welcher Kreis M_1

Figur 197.



in *c*, M_2 in *d* berührt, an Kreis *m* und M_1 in *c*, an Kreis *m* und M_2 in *c* und *d* die Tangenten, welche die in C bezw. A errichteten Senkrechten in E bezw. F schneiden. Ziehe M_1E und M_2F, welche einander auf dem in M errichteten Lote im Punkte μ schneiden, dann ist μ der Mittelpunkt eines Kreises, der durch A, C, *c*, *d* geht. (Ist von Kreis *m* nur ein Punkt gegeben, durch welchen er gehen soll, so verbindet man, nach Aufgabe 87, diesen Punkt mit dem inneren Aehnlichkeitspunkt von M_2 und M_1 und legt durch den gegebenen Punkt und die Punkte A und C einen Kreis, welcher jene Verbindungsgerade in einem weiteren Punkte des Kreises *m* trifft, u. s. w. nach Aufgabe 87.)

Trage auf $M\mu$ von μ an die Strecke $\frac{1}{2}$ AC wiederholt ab, wodurch man die Punkte μ_1, μ_2 μ_3, μ_4 erhält.

Beschreibe um μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 .... Kreise, die durch A und C gehen, so schneiden diese Kreise M_1 und M_2 in den Paaren zusammengehöriger Berührungspunkte c_1, d_1; c_2, d_2; c_3, d_3; c_4, d_4 ...., und die Halbmesser M_1c_1 und M_2d_1, M_1c_2 und M_2d_2, M_1c_3 und M_2d_3 u. s. w. geben durch ihren Schnitt die gesuchten Mittelpunkte m_1, m_2, m_3, m_4 ....

Beweis folgt aus Anmerkung 95, 1.

Anmerkung 97. Zur Probe I kann man, nachdem man durch $M_1\mu$ den Punkt E auf der Senkrechten durch C und durch $M_2\mu$ den Punkt F auf der Senkrechten durch A erhalten hat, die Strecken:

$$FF_1 = F_1F_2 = F_2F_3 \ldots = \frac{R_2}{R_1}(R_2 - R_1)$$

und

$$EE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 \ldots = \frac{R_1}{R_2}(R_2 - R_1)$$

machen, von den Punkten F_1, F_2, F_3 an Kreis M_2 und von den Punkten E_1, E_2, $E_3 \ldots$ an Kreis M_1 die Tangenten legen, diese müssen die zugehörigen Kreise in den Berührungspunkten $d_1, d_2, d_3 \ldots$ und $c_1, c_2, c_3 \ldots$ der gesuchten Kreise berühren.

Probe II. Die Tangentenpaare Ec und Fd, E_1c_1 und F_1d_1, E_2c_2 und F_2d_2, E_3c_3 und F_3d_3 u. s. w. schneiden einander auf der durch B gelegten Tangente an M_1 und M_2. Dann geht $G\mu$ durch m, $G_1\mu_1$ durch m_1, $G_2\mu_2$ durch m_2, $G_3\mu_3$ durch m_3 u. s. w. Endlich kann man zur

Probe III noch die Konstruktion I anwenden, indem man durch Bm den Punkt D erhält, und von D aus die Strecken $DD_1 = D_1D_2 = D_2D_3$ u. s. w. $= AC$ macht, BD_1 geht durch m_1, BD_2 durch m_2, u. s. w.

Die Beweise folgen aus Anmerkung 94 und 95.

Aufgabe 162. An zwei einander berührende Kreise einen Berührungskreis zu legen, dessen Quotient in Bezug auf die Zentrale der gegebenen Kreise gegeben ist.

Gegeben: q, entweder als Zahl oder als Verhältnis der Strecken $p_1 : r_1$. Kreis um M_1, Kreis um M_2.

Voraussetzung: Die Kreise M_1 und M_2 berühren einander in B.

Gesucht: Kreis um m.

Figur 198.

Konstruktion. Die Zentrale M_1M_2 (Fig. 198) schneide Kreis M_1 in C, Kreis M_2 in A, M sei Mitte von AC.

Mache auf einer beliebigen Geraden $Op_1 = \frac{1}{2}p_1$, senkrecht dazu $Or_1 = r_1$ und $OR_0 = \frac{1}{2}AC$. Ziehe p_1r_1 und die Parallele dazu

durch R_0, welche Op_1 in P_0 trifft. Errichte auf M_1M_2 in M die Senkrechte und mache auf ihr $M\mu = OP$. Beschreibe um μ einen Kreis, der durch A und C geht, so schneidet er den Kreis M_1 in c, den Kreis M_2 in d. M_1c und M_2d schneiden einander im Mittelpunkte m des gesuchten Kreises.

Beweis. Kreis m berührt die gegebenen Kreise in c und d nach Anmerkung 51. Nach Anmerkung 94, 2 und 3, ist, wenn man $mP_0 \perp M_1M_2$ fällt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{mP}{r} = \frac{M\mu}{MA};$$

aber nach Konstruktion ist $M\mu = OP_0$ und (siehe Erkl. 88):

$$OP_0 : OR_0 = Op_1 : Or_1,$$

oder:

$$OP_0 : MA = \tfrac{1}{2} p_1 : r_1,$$

folglich:

$$\frac{mP}{r} = \frac{2M\mu}{AM} = \frac{2 \cdot MA}{2 \cdot MA} \cdot \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_1}{r_1} = q.$$

Anmerkung 98. Zur Probe kann man auf M_1M_2 in A, B, C die Senkrechten errichten, durch $M_1\mu$ Punkt E, durch $M_2\mu$ Punkt F bekommen, von E an Kreis M_1, von F an Kreis M_2 die Tangenten Ec bezw. Fd ziehen, wobei $Ec = EC$, $Fd = FA$ ist; die beiden Tangenten schneiden einander auf der dritten Senkrechten in G, $G\mu$ geht durch m.

Aufgabe 163. Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene, einander berührende Kreise berührt, und dessen Quotient in Bezug auf einen gegebenen Durchmesser eines der gegebenen Kreise bekannt ist.

Gegeben: q, entweder als Zahl, oder durch das Verhältnis zweier gegebenen Strecken: $p_1 : r_1$, Kreise um M_1 und M_2, Durchmesser ED von Kreis M_2.

Voraussetzung: Die Kreise M_1 und M_2 berühren einander in B.

Gesucht: Kreis um m_1.

Analysis. Die Zentrale schneide Kreis M_2 in A, Kreis M_1 in C, über AC als Durchmesser sei der Kreis mit Mittelpunkt M gezeichnet. Ferner sei derjenige Kreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt m auf ED liegt, und welcher Kreis M_2 in D, Kreis M_1 in d berührt.

Der gesuchte Kreis m_1 berühre die gegebenen Kreise in D_1 und d_1, m_1p_1 sei das Lot auf den gegebenen Durchmesser DE.

Figur 199.

Nach Anmerkung 94 liegen die vier Punkte A, C, D, d auf einem Kreise μ, ebenso die vier Punkte A_1, C_1, D_1, d_1 auf einem Kreise μ_1.

Fällt man von M_1 auf DE das Lot $M_1 Q_1$, so ist der Quotient $\frac{M_1 Q_1}{R_1}$ des Kreises M_1 in Bezug auf den Durchmesser DE gegeben, er sei Q.

Der Quotient des gesuchten Kreises sei q, dann ist nach Aufgabe 157, 6):

1). . . . . . . $q = Qn^2 + 2n$.

Löst man diese Gleichung nach n auf, so erhält man (siehe Erkl. 93):

2). . $n = -\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{q}{Q} + \frac{1}{Q^2}}$.

Dabei bedeutet n die Zahl, welche angiebt, der wievielte Kreis nach m der Kreis m_1 in der Reihe der Berührungskreise ist.

Daher ist nach Anmerkung 95, 1):

3). . . . . $\mu\mu_1 = n . AM = n . CM$.

Daher lässt sich $\mu\mu_1$ berechnen, wenn der Wert von q und Q numerisch gegeben ist, oder konstruieren, wenn man q als ein Verhältnis von Strecken kennt.

Konstruktion. Berechne oder konstruiere (siehe Anmerkung 99) den Wert n nach Formel 2 und die Strecke $\mu\mu_1$ nach Formel 3. Beschreibe dann einen Kreis μ, der

durch die Punkte A, C, D geht und trage auf der durch μ gezogenen Senkrechten von AC die Strecke $\mu\mu_1$ ab. Beschreibe um μ_1 einen Kreis, der durch A und C geht und M_2 in D_1, M_1 in d schneidet. Ziehe M_2D_1 und M_1d_1, die einander in m_1 schneiden. Ein Kreis um m_1 mit m_1D_1 ist der gesuchte.

Beweis siehe Analysis.

Anmerkung 99. Die Konstruktion von $\mu\mu_1$ vollzieht sich in folgender Weise einfach. Bezeichnet man das Lot M_1Q_1 von M_1 auf den gegebenen Durchmesser mit P_1, den Halbmesser von Kreis M_1 mit R_1, so ist:

$$n = -\frac{R_1}{P_1} + \sqrt{\frac{p_1}{r_1} \cdot \frac{R_1}{P_1} + \frac{R_1^2}{P_1^2}} = -\frac{R_1}{P_1} + \sqrt{\frac{p_1 P_1}{r_1} \cdot \frac{R_1}{P_1^2} + \frac{R_1^2}{P_1^2}}.$$

Mache auf M_1Q_1 die Strecke $M_1H = r_1$ (wegen beschränkten Raumes wurde $M_1H = \frac{1}{2}r_1$ und $M_1L = \frac{1}{2}p_1$ gemacht), auf M_1C die Strecke $M_1L = p_1$, ziehe HL und die Parallele dazu durch Q_1, welche M_1C in K trifft, so ist:

$$M_1K = \frac{M_1L \,.\, M_1Q_1}{M_1H} = \frac{p_1 \,.\, P_1}{r_1} = K.$$

Daher:

$$n = -\frac{R_1}{P_1} + \sqrt{\frac{K \,.\, R_1}{P_1^2} + \frac{R_1^2}{P_1^2}} = -\frac{R_1 + \sqrt{R_1(K + R_1)}}{P_1}.$$

Beschreibe über BK einen Halbkreis, welcher die auf BK in M_1 errichtete Senkrechte in N schneidet und trage BN von B auf BC nach Q, so ist:

$$M_1Q = BQ - BM_1 = BN - BM_1 = BN - R_1,$$

aber:

$$\overline{BN}^2 = BM_1 \,.\, BK = R_1(R_1 + K),$$

folglich:

$$n = \frac{M_1Q}{M_1Q_1}.$$

Mache daher auf M_1Q_1 die Strecke $M_1R = AM$, ziehe Q_1Q und die Parallele dazu durch R, welche M_1C in O trifft, so ist M_1O die gesuchte Strecke $\mu\mu_1$.

Anmerkung 100. Im Bisherigen waren stets die beiden gegebenen Kreise als einander berührend vorausgesetzt. Nur auf solche beziehen sich die Sätze von *Pappus* und *Steiner* über die Quotienten von Berührungskreisen. Dagegen ist es gleichgiltig, ob die gegebenen Kreise einander von aussen oder innen berühren. Die Quotienten der successiven Berührungskreise nehmen ins Unendliche zu. Wenn dagegen die gegebenen Kreise einander nicht berühren, lässt sich jene einfache Gesetzmässigkeit nicht mehr konstatieren, dagegen haben die Quotienten entweder ein Maximum oder ein Minimum, je nach der Lage der gegebenen Kreise gegen einander.

Aufgabe 164. An zwei gegebene Kreise, welche einander nicht berühren, einen Berührungskreis zu zeichnen, für welchen der Quotient in Bezug auf eine gegebene Gerade ein Maximum oder Minimum sei.

Gegeben: Kreis um M, Kreis um N. Gerade ap.

Gesucht: Kreis um m.

Analysis. Der gesuchte Kreis m berühre Kreis N in d, Kreis n in e, man ziehe in d und e die Tangenten an Kreis m, so müssen dieselben einander auf der Potenzlinie der Kreise N und n schneiden, der Schnittpunkt sei a. Es seien M und μ zwei andere Kreise, welche N und n berühren, und D und δ, E und ε seien ihre Berührungs-

Figur 200.

punkte mit N und n, so schneiden Dd und Ee einander auf der Potenzlinie in A, ebenso $d\delta$ und $e\varepsilon$ auf der Potenzlinie in α. Da ad Tangente an N ist, also mit N nur den Punkt d gemeinsam hat, kann auch kein anderer Berührungskreis mit Kreis m zusammen den Aehnlichkeitspunkt a haben, sondern die Aehnlichkeitspunkte A der von der Potenzlinie entfernteren Kreise liegen über a, die der näheren Kreise μ liegen unter a.

Man ziehe durch M, m, μ beliebige Parallelen, welche eine beliebige durch a gehende Gerade bezw. in P_1, p, π_1 schneiden, ziehe ferner Ap, welche die Parallele MP_1 in P, und αp, welche die Parallele $\mu\pi_1$ in π schneidet.

Da p auf dem Aehnlichkeitsstrahl Ap liegt, so ist:

$$\frac{mp}{r} = \frac{MP}{R}.$$

Da p auf dem Aehnlichkeitsstrahl αp liegt, so ist:

$$\frac{mp}{r} = \frac{\mu\pi}{\varrho}.$$

Aber nach dem Obigen ist $MP > MP_1$ und $\mu\pi > \mu\pi_1$, daher ist der Quotient $\frac{mp}{r}$ grösser als jeder der Quotienten $\frac{MP_1}{R}$ oder $\frac{\mu\pi_1}{\varrho}$. Es ist also, mag die Lage der Geraden, in Bezug auf welche die Quotienten genommen werden, sein wie sie will, wenn sie nur durch einen festen Punkt der Potenzlinie geht, der Quotient desjenigen Kreises ein Maximum, welcher die gegebenen in den Berührungspunkten der Tangenten berührt, die man von dem festen Punkte auf der Potenzlinie an die gegebenen Kreise ziehen kann.

Erkl. 169. Der nebenstehend bewiesene Satz von *Steiner* lautet:

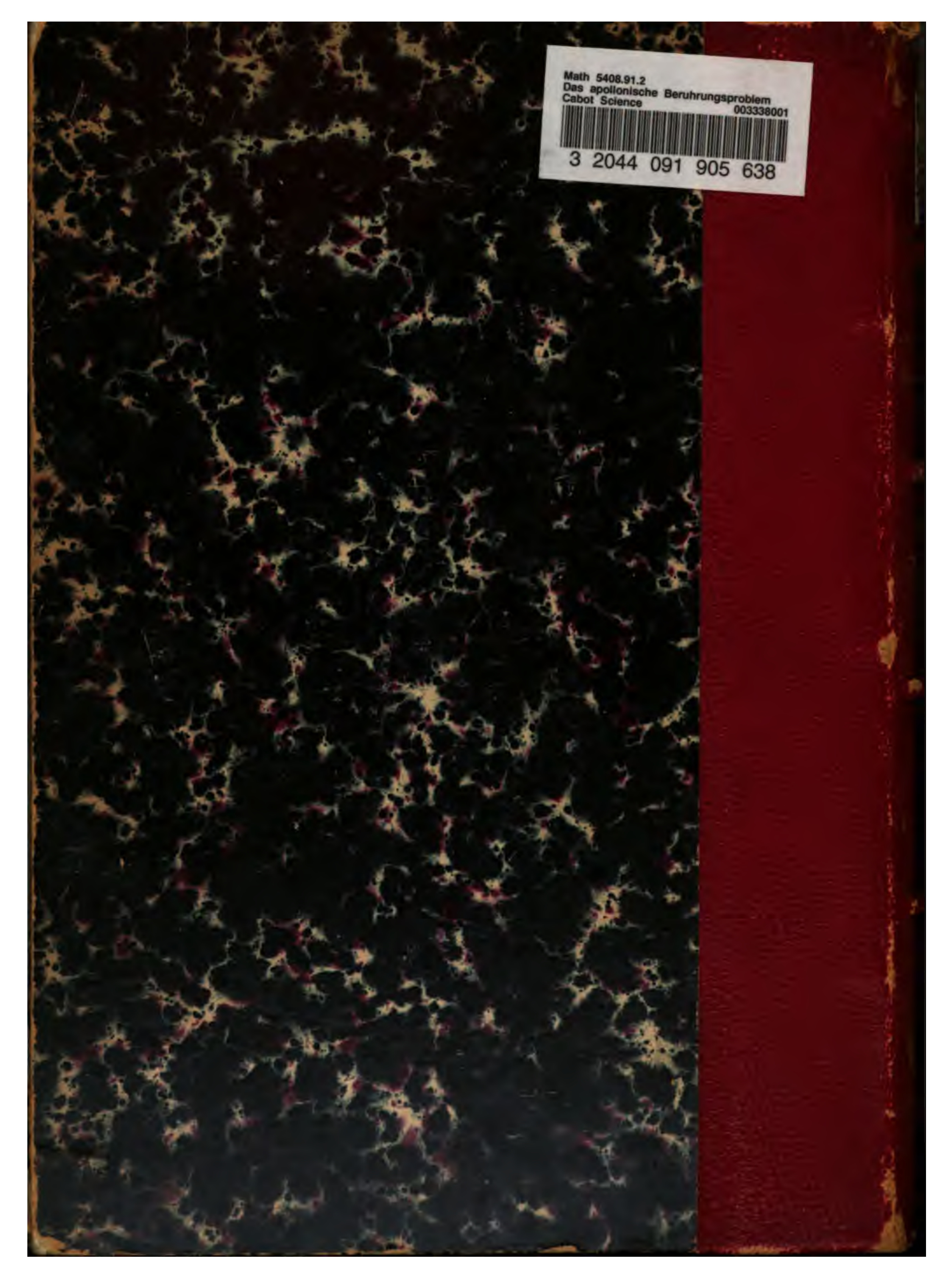
Zieht man aus irgend einem Punkt a der Potenzlinie zweier ineinander liegender Kreise N, n eine beliebige Gerade und bestimmt in Bezug auf sie die Quotienten aller Kreise, welche die gegebenen gleichzeitig ungleichartig berühren, so ist der Quotient desjenigen Kreises am grössten (kleinsten), welcher mit dem Kreise N zusammen von der Tangente aus dem Punkte a in einem und demselben Punkte berührt wird.

Konstruktion. Beschreibe einen beliebigen Kreis K, der Kreis N in B und B_1, Kreis n in b und b_1 schneidet, ziehe BB_1, bb_1, die einander in C treffen, und fälle von C auf die Zentrale Nn die Senkrechte, so ist diese die Potenzlinie der Kreise N und n (siehe Anmerkung 29). Die Potenzlinie schneide die gegebene Gerade in a. Ziehe von a an Kreis N die Tangenten ad und ad_1, an Kreis n die Tangenten ae und ae_1. Ziehe Nd und ne, die einander in m schneiden, ebenso Nd_1 und ne_1, die einander in m_1 schneiden, beschreibe um m und m_1 Kreise mit dem Halbmesser md bezw. m_1d_1, so sind diese die gesuchten.

Beweis folgt aus Analysis.

Determination. Für die gefundenen Kreise ist der Quotient ein Maximum, für den einen positiv, für den andern negativ. Würde man dagegen diejenigen beiden Kreise beschrieben haben, welche N in d und n in e_1 oder N in d_1 und n in e berühren, so wäre für diese der Quotient ein Minimum. (Siehe *Steiner* in *Crelle,* Journal für Mathematik, Bd. I.)

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.


Math 5408.91.2
Das apollonische Beruhrungsproblem
Cabot Science
003338001
3 2044 091 905 638